

VI. Derivace funkcí

Shrnutí teorie.

Definice. (Derivace funkce) Bud' f reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě a a značíme ji $f'(a)$. Pomocí příslušné jednostranné limity zavádíme jednostranné derivace v bodě a a značíme je $f'_+(a)$ resp. $f'_-(a)$.

Příklad: Vezměme $f(x) = x$, pak máme, v libovolném $a \in \mathbb{R}$,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a+h-a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Tvrzení. (Aritmetika derivací) Necht' reálné funkce f a g mají vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom platí

- (a) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- (b) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$.
- (c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$, jestliže $g(a) \neq 0$.

Tvrzení. (Derivace složené funkce) Necht' reálné funkce f , resp. g mají vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, resp. $x_0 \in \mathbb{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Potom platí

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Příklad: Vezměme $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x^2 + e^{3x}$, tyto funkce mají vlastní derivaci na celém svém definičním oboru, jímž je celá reálná osa. Bud' tedy $x \in \mathbb{R}$ libovolný a $y := x^2 + e^{3x}$. Dle tvrzení platí vztah

$$(\sin(x^2 + e^{3x}))' = (f(g(x_0)))' = \underbrace{f'(y_0)}_{=\cos y} \cdot \underbrace{g'(x_0)}_{=2x+3e^{3x}} = (2x + 3e^{3x}) \cos(x^2 + e^{3x}).$$

Tvrzení. (Derivace inverzní funkce) Necht' reálná funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotónní. Předpokládejme, že v bodě $x_0 \in (a, b)$ existuje její vlastní a nenulová derivace. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Příklad: Uvažujme funkci $f(x) = \sin x$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, zde je tedy f spojitá a rostoucí. Bud' $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ libovolný, pak $f'(x) = \cos x \neq 0$. Označme $y := \sin x$, dle tvrzení dostáváme

$$(\arcsin y)' = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Tvrzení. (Výpočet jednostranné derivace) Necht' reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x).$$

Levostranná varianta je analogická.

Příklad: Vezměme funkci $f(x) = \sqrt{x}$, její definiční obor je $\langle 0, +\infty \rangle$, je spojitá na $(0, \infty)$ a spojitá zprava v 0. Na (otevřeném) intervalu $(0, \infty)$ je její derivace dána vztahem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Dle tvrzení můžeme spočítat, že $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$.

Příklad 1. [Pochopení pojmu] Z definice určete derivace zadané funkce f , určete definiční obory f, f' :

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------|
| (a) $f(x) = 8.$ | (e) $f(x) = e^x.$ |
| (b) $f(x) = x^2.$ | (f) $f(x) = 2^x.$ |
| (c) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}.$ | (g) $f(x) = \sqrt{5x-8}.$ |
| (d) $f(x) = \sin x.$ | (h) $f(x) = x .$ |

Příklad 2. [Elementární příklady] Najděte derivaci funkce f , určete definiční obory f, f' :

- | | |
|--|--|
| (a) $f(x) = 3x^5 - 17x^3 + \sqrt{3}x - 8.$ | (g) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0) \\ \log(1+x), & x \in (0, \infty) \end{cases}.$ |
| (b) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x.$ | |
| (c) $f(x) = x + 2\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}.$ | |
| (d) $f(x) = x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{\sqrt{x}}.$ | |
| (e) $f(x) = x \log x + x \log_3 x.$ | (h) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in (-\infty, 1) \\ (1-x)(2-x), & x \in (1, 2) \\ -(2-x), & x \in (2, \infty) \end{cases}.$ |
| (f) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x.$ | |

Příklad 3. [Složené funkce] Najděte derivaci funkce f , určete definiční obory f, f' :

- | | |
|--|---|
| (a) $f(x) = (x^2 + 51x + 119)^{87}.$ | (o) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}.$ |
| (b) $f(x) = x^3(x+2)^8(x-7)^{11}.$ | (p) $f(x) = \arcsin(\cos x).$ |
| (c) $f(x) = \log(x^2 + x + 2).$ | (q) $f(x) = \log(\arccos x).$ |
| (d) $f(x) = \cos(x^3 - x + 2)^9.$ | (r) $f(x) = \log(\arctan x).$ |
| (e) $f(x) = x x + 1.$ | (s) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{2}}{x}.$ |
| (f) $f(x) = 2 \log \frac{x^2-1}{x^2+1}.$ | (t) $f(x) = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \arctan \sqrt[3]{x}.$ |
| (g) $f(x) = \sin^2 x - \sin(x^2).$ | (u) $f(x) = e^{x^2-1} - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}.$ |
| (h) $f(x) = \log(\log^2(\log^3 x)).$ | (v) $f(x) = \arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}.$ |
| (i) $f(x) = \sin(\sin(\sin x)).$ | (w) $f(x) = (\arctan x)^{\arcsin x}.$ |
| (j) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}.$ | (x) $f(x) = x(\arcsin(x^3))^2.$ |
| (k) $f(x) = \frac{x^2(1-x)^3}{1+x}.$ | (y) $f(x) = e^{\frac{1}{\log x }}.$ |
| (l) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$ | (z) $f(x) = \log x .$ |
| (m) $f(x) = x^x.$ | |
| (n) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$ | |

Příklad 4. [Zkouškové příklady] Vyšetřete spojitost (i jednostrannou) a spočítejte derivaci zadané funkce v každém bodě, v němž existuje (i pouze jednostranná):

- $f(x) = \cos(\max\{x, x^2\}).$
- $f(x) = \operatorname{sign}(x^3 - 4x) \cdot \sin(x^3 - 2x^2).$
- $f(x) = \sqrt[3]{3^{|x^2-1|} - 3}.$
- $f(x) = (\cos x)^{\min\{2, x^3+x^2-2x+2\}} =: (\cos x)^{g(x)}.$
- $f(x) = x^2 \cdot \lfloor \frac{4}{\pi} \arctan x \rfloor.$
- $f(x) = \max\{x, 1-x^2, (x-1)^2\}.$
- $f(x) = \arctan(x-1) \cdot \left| \arctan^2 x - \frac{\pi^2}{16} \right|.$
- $f(x) = (x^3 - 2x^2 + x) \cdot \lfloor \frac{4}{\pi} \arctan x \rfloor.$
- $f(x) = \left(\operatorname{arccot} x - \frac{\pi}{4}\right) \sqrt[3]{\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \frac{1}{2}}.$
- $f(x) = \arccos(\min\{2x^2, x+1\}).$
- $f(x) = \sqrt{1 - (x^2 - 1)^4}.$

Výsledky - VI. Derivace funkcí

Příklad 1. [Pochopení pojmu]

- (a) $f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.
- (b) $f'(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$.
- (c) $f'(x) = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.
- (d) $f'(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$.
- (e) $f'(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$.
- (f) $f'(x) = 2^x \log 2, x \in \mathbb{R}$.
- (g) $f'(x) = \begin{cases} \frac{5}{2\sqrt{5x-8}}, & x \in (\frac{8}{5}, +\infty) \\ +\infty, & x = 0_+ \end{cases}$.
- (h) $f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \text{Neexistuje,} & x = 0 \end{cases}$.

Příklad 2. [Elementární příklady]

- (a) $f'(x) = 15x^4 - 51x^2 + \sqrt{3}, x \in \mathbb{R}$.
- (b) $f'(x) = (x^2 + 1)e^x, x \in \mathbb{R}$.
- (c) $f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}, & x > 0 \\ +\infty, & x = 0_+ \end{cases}$.
- (d) $f'(x) = \frac{3}{x\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x^3}}, x > 0$.
- (e) $f'(x) = (1 + \log x)(1 + \frac{1}{\log 3}), x > 0$.
- (f) $f'(x) = (\frac{3}{2})^x \log \frac{3}{2}, x \in \mathbb{R}$.
- (g) $f'(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x}, & x > 0 \end{cases}$.
- (h) $f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ 2x - 3, & x \in \langle 1, 2 \rangle \\ 1, & x > 2 \end{cases}$.

Příklad 3. [Složené funkce]

- (a) $f'(x) = 87(2x + 51)(x^2 + 51x + 119)^{86}, x \in \mathbb{R}$.
- (b) $f'(x) = (22x^2 - 49x - 42)x^2(x + 2)^7(x - 7)^{10}, x \in \mathbb{R}$.
- (c) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+2}, x \in \mathbb{R}$.
- (d) $f'(x) = 9(1 - 3x^2)(x^3 - x + 2)^8 \sin(x^3 - x + 2)^9, x \in \mathbb{R}$.
- (e) $f'(x) = 2x \cdot \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R}$.
- (f) $f'(x) = \begin{cases} \frac{8x}{x^4-1}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ -\infty, & x = -1_- \\ +\infty, & x = 1_+ \end{cases}$.
- (g) $f'(x) = 2 \sin x \cos x - 2x \cos(x^2), x \in \mathbb{R}$.
- (h) $f'(x) = \frac{6}{x \cdot \log x \cdot \log(\log^3 x)}, x \in (1, e) \cup (e, +\infty)$.
- (i) $f'(x) = \cos[\sin(\sin x)] \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x, x \in \mathbb{R}$.
- (j) $f'(x) = \frac{9}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}, x \in (-3, 3)$.
- (k) $f'(x) = \frac{-2x(2x^2+2x-1)(1-x)^2}{(1+x)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- (l) $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (m) $f'(x) = (1 + \log x)x^x, x > 0$.
- (n) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} (1 + \log \frac{1}{x}) (\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}, x > 0$.
- (o) $f'(x) = (-\sin x \cdot \log(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x})(\sin x)^{\cos x}, x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$.
- (p) $f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn}(\sin x), & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\ -1, & x \in \{2k\pi_+, (2k+1)\pi_-\}, k \in \mathbb{Z} \\ 1, & x \in \{2k\pi_-, (2k+1)\pi_+\}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- (q) $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\arccos x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1, 1) \\ -\infty, & x = -1_+ \end{cases}$.
- (r) $f'(x) = \frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}, x > 0$.
- (s) $f'(x) = \frac{1}{2+x^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (t) $f'(x) = \begin{cases} \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)} + \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{1+x^{\frac{2}{3}}}, & x > 0 \\ +\infty, & x = 0_+ \end{cases}$.
- (u) $f'(x) = 2xe^{x^2-1} - \frac{1}{e^{2x}-1}, x \in \mathbb{R}$.
- (v) $f'(x) = \frac{x \log x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}, x > 1$.
- (w) $f'(x) = \begin{cases} (\arctan x)^{\arcsin x} \left(\frac{\log(\arctan x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right), & x \in (0, 1) \\ -\infty, & x = 1_- \end{cases}$.
- (x) $f'(x) = \begin{cases} (\arcsin(x^3))^2 + \frac{6x^3 \cdot \arcsin(x^3)}{\sqrt{1-x^6}}, & x \in (-1, 1) \\ +\infty, & x = -1_+ \\ +\infty, & x = 1_- \end{cases}$.
- (y) $f'(x) = -\frac{1}{x \log^2 |x|} e^{\log |x|}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$.
- (z) $f'(x) = \frac{\log |x|}{x |\log |x||}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 4. [Zkouškové příklady]

- (a) $f'(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \in (0, 1) \\ -2x \sin(x^2), & x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ 0, & x = 0 \\ -\sin 1, & x = 1_- \\ -2 \sin 1, & x = 1_+ \end{cases}$.
- (b) $f'(x) = \begin{cases} (3x^2 - 4x) \cdot \operatorname{sgn}(x^3 - 4x) \cdot \cos(x^3 - 2x^2), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 2\} \\ 0, & x = 0 \\ -4, & x = 2_- \\ 4, & x = 2_+ \\ \infty, & x = -2 \end{cases}$.
- (c) $f'(x) = \begin{cases} \frac{\log 3 \cdot 3^{|x^2-1|} \cdot 2x \cdot \operatorname{sgn}(x^2-1)}{3(3^{|x^2-1|-3})^{\frac{2}{3}}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1, \pm \sqrt{2}\} \\ -\infty, & x \in \{-\sqrt{2}, 0_+\} \\ +\infty, & x \in \{\sqrt{2}, 0_-\} \\ -\frac{\sqrt[3]{2}}{3} \log 3, & x \in \{1_-, -1_+\} \\ \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \log 3, & x \in \{1_+, -1_-\} \end{cases}$.
- (d) $f'(x) = \begin{cases} e^{g(x) \log(\cos x)} \cdot (g'(x) \cdot \log(\sin x) - g(x) \cdot \tan x), & x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \setminus \{0, 1\} \\ 0, & x = 0 \\ -2 \cos^2 1 \cdot \tan 1, & x = 1_+ \\ -\cos^2 1 \cdot (2 \tan 1 - 3 \log(\cos 1)), & x = 1_- \end{cases}$

$$(e) f'(x) = \begin{cases} -4x, & x \in (-\infty, -1) \\ -2x, & x \in (-1, 0) \\ 0, & x \in (0, 1) \\ 2x, & x \in (1, \infty) \\ 0, & x = 0 \\ +\infty, & x \in \{-1_-, 1_-\} \\ 0, & x \in \{-1_+, 1_+\} \end{cases} .$$

$$(f) f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}) \\ -2x, & x \in (0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}) \\ 2(x-1), & x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty) \\ 2-2\sqrt{5}, & x = (\frac{-1+\sqrt{5}}{2})_- \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, & x = (\frac{-1+\sqrt{5}}{2})_+ \\ 1, & x = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})_- \\ 1+\sqrt{5}, & x = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})_+ \\ -2, & x = 0_- \\ 0, & x = 0_+ \end{cases} .$$

$$(g) f'(x) = \begin{cases} \frac{|\arctan^2 x - \frac{\pi^2}{16}|}{1+(1-x)^2} + \arctan(x-1) \cdot \operatorname{sgn}(\arctan^2 x - \frac{\pi^2}{16}) \cdot \frac{2\arctan x}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \\ 0, & x = 1 \\ -\frac{\pi}{4} \arctan 2, & x = -1_+ \\ \frac{\pi}{4} \arctan 2, & x = -1_- \end{cases} .$$

$$(h) f'(x) = \begin{cases} -2 \cdot (3x^2 - 4x + 1), & x \in (-\infty, -1) \\ -(3x^2 - 4x + 1), & x \in (-1, 0) \\ 0, & x \in (0, 1) \\ 3x^2 - 4x + 1, & x \in (1, \infty) \\ 0, & x = 1 \\ -1, & x = 0_- \\ 0, & x = 0_+ \\ -\infty, & x = -1_- \\ -8, & x = -1_+ \end{cases} .$$

$$(i) f'(x) = \begin{cases} -\frac{\sqrt[3]{\sin^2 \frac{\pi x}{4} - \frac{1}{2}}}{1+x^2} + \frac{(\operatorname{arccot} x - \frac{\pi}{4})}{3} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{4} \cdot \cos \frac{\pi x}{4}}{(\sin^2 \frac{\pi x}{4} - \frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{2k+1; k \in \mathbb{Z}\} \\ 0, & x = 1 \\ +\infty, & x = 2k+1 \text{ pro } k > 0 \text{ liché nebo } k < 0 \text{ sudé} \\ -\infty, & x = 2k+1 \text{ pro } k < 0 \text{ liché nebo } k > 0 \text{ sudé} \end{cases}$$

$$(j) f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}, & x \in (-2, -\frac{1}{2}) \\ \frac{-4x}{\sqrt{1-4x^4}}, & x \in (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ -\infty, & x = -2_+ \\ -\infty, & x = (\frac{\sqrt{2}}{2})_- \\ \frac{4}{\sqrt{3}}, & x = (\frac{-1}{2})_+ \\ -\frac{2}{\sqrt{3}}, & x = (\frac{-1}{2})_- \end{cases} .$$

$$(k) f'(x) = \begin{cases} -\frac{4x(x^2-1)^3}{\sqrt{1-(x^2-1)^4}}, & x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}) \\ -2, & x = 0_- \\ 2, & x = 0_+ \\ +\infty, & x = -\sqrt{2}_+ \\ -\infty, & x = \sqrt{2}_- \end{cases} .$$