

## I. Středoškolská matematika

**Příklad 1.** Řešte následující rovnice v  $\mathbb{R}$ :

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| (a) $\sin 2x = \cos x$              | (e)* $2 \sin x + \cos x = 1$                |
| (b) $\log(x^2 + 1) = 2 \log(3 - x)$ | (f)* $ x - 4  +  2x - 1  =  -x  + 3$        |
| (c) $e^x + 12e^{-x} = 7$            | (g)* $2^{4x+1} + 3 \cdot 2^{2x+1} - 8 = 0$  |
| (d) $1 -  \sin x  = \cos^2 x$       | (h)* $2 \log_2^2 x = \log_2 8 - \log_2 x^5$ |

**Příklad 2.** Řešte následující nerovnice v  $\mathbb{R}$ :

- |  |                                   |  |
|--|-----------------------------------|--|
| (a)* $\frac{x+2}{x^2+3x-4} \geq \frac{3}{x-2}$ | (d) $ x+1  -  x+3  < 1$           | (g)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1} > 3 \cdot 9^{- x }$ |
| (b) $(x+2)(x-2) \leq 2x-5$                     | (e)* $\frac{x-2}{x+3} \geq  x+1 $ | (h)* $  2x-1  - 3  \leq 2$                                 |
| (c) $\log_{\frac{1}{6}}(x^2 - 3x + 3) \leq 0$  | (f) $\tan(2x-1) \leq \sqrt{3}$    | (i)* $2 - \cos 2x - 3 \sin x < 0$                          |

**Příklad 3.** Načrtněte grafy následujících funkcí:

- |                                   |                                |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| (a) $f(x) =    x  - 1  - 1  - 1 $ | (c) $f(x) =  e^{ x+2 } - \pi $ |
| (b) $f(x) = 1 -  \sin 2x $        | (d) $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$  |

**Příklad 4.** Řešte (ne)rovnice v závislosti na parametru  $a \in \mathbb{R}$ :

- |                       |                             |                        |
|-----------------------|-----------------------------|------------------------|
| (a) $ x  +  x+1  < a$ | (b) $ax^2 + 2x - a + 2 = 0$ | (c) $-1 < ae^x \leq 0$ |
|-----------------------|-----------------------------|------------------------|

**Příklad 5.** Vyjádřete funkci  $\sin 4x$  (či  $\cos 4x$ ) pomocí násobků  $\sin x$  a  $\cos x$  (a jejich mocnin).

**Příklad 6.** Ukažte, že platí:

- Známý vzoreček pro řešení kvadratické rovnice.
- $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  pro  $q \neq 1$ .
- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .
- $|a+b| \leq |a| + |b|$  a  $||a| - |b|| \leq |a-b|$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{R}$ .

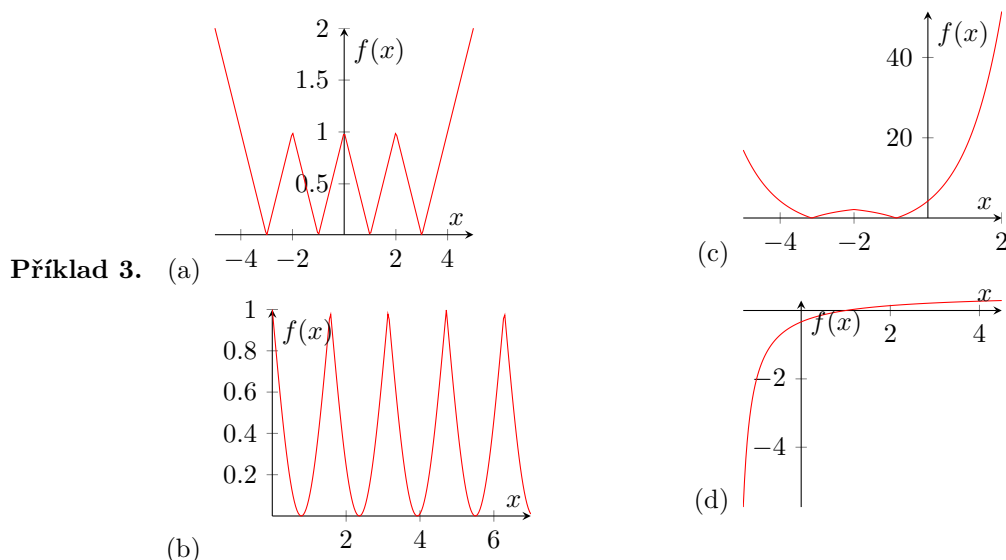
**Příklad 7.** Dokažte následující výroky.

- Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $n < 2^n$ .
- Pro každé  $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$  je  $n^2 < 2^n$ .
- Číslo  $\sqrt{2}$  je iracionální.
- Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a  $x > -1$  platí nerovnost  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$  pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ .
- \*  $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$  pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ .
- Součet prvních  $n$  lichých čísel je roven  $n^2$ .
- \* Pro jakékoliv  $n \in \mathbb{N}$  lze číslo  $13^n$  lze napsat jako součet dvou druhých mocnin nějaký přirozených čísel.
- \* Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a každá  $a, b \in \mathbb{R}$  platí  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ .

## Výsledky - I. Středoškolská matematika

- Příklad 1.** (a)  $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ . (e)\*  $x \in \{2k\pi, \pi - \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ .  
 (b)  $x = \frac{4}{3}$ . (f)\*  $x \in \langle \frac{1}{2}, 4 \rangle$ .  
 (c)  $x \in \{\log 3, \log 4\}$ . (g)\*  $x = 0$ .  
 (d)  $x \in \{\frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$ . (h)\*  $x \in \{\frac{1}{8}, \sqrt{2}\}$ .

- Příklad 2.** (a)\*  $x \in (-\infty, \frac{1}{4}(-9 - \sqrt{145})] \cup (-4, \frac{1}{4}(-9 + \sqrt{145})) \cup (1, 2)$ .  
 (b)  $x = 1$ .  
 (c)  $x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$ .  
 (d)  $x \in (-\frac{5}{2}, \infty)$ .  
 (e)\*  $x \in [\frac{1}{2}(-5 - \sqrt{21}), -3)$ .  
 (f)  $x \in (\frac{1}{2}(1 - \frac{\pi}{2}) + \frac{k\pi}{2}, \frac{1}{2}(1 + \frac{\pi}{3}) + \frac{k\pi}{2}]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 (g)\*  $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ .  
 (h)\*  $x \in [-2, 0] \cup [1, 3]$ .  
 (i)\*  $x \in (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



- Příklad 4.** (a)  $a \in (\infty, 0] \cup (0, 1]$  : bez řešení,  $a > 1$  :  $x \in (-\frac{1}{2}(a+1), -1) \cup [-1, 0] \cup (0, \frac{1}{2}(a-1))$ .  
 (b)

$$a = 0 : x = -1,$$

$$a = 1 : x = -1,$$

$$a \notin \{0, 1\} : x_{1,2} = \frac{1}{a} \left[ -1 \pm \sqrt{1 - 2a + a^2} \right].$$

(c)

$$a > 0 : \text{žádné řešení},$$

$$a = 0 : x \in \mathbb{R},$$

$$a < 0 : x \in \left( -\infty, \log \left( -\frac{1}{a} \right) \right).$$

**Příklad 5.**

$$\sin 4x = 4 \sin x \cos^3 x - 4 \sin^3 x \cos x,$$

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x.$$