Vzorové řešení k Př. 1 – 4 ze sady I.

Příklad 1. v $\mathbb{R}$.

(a) $\sin 2x = \cos x$

Vše definováno na celém $\mathbb{R}$. Přepíšme pomocí vzorce

$$2\sin x \cdot \cos x = \cos x$$

$$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$$

- $\cos x = 0 \iff x = \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = 1/2 \iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ nebo $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Dohromady: $\underline{\underline{x \in}} \left\{ \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(b) $\log(x^2+1) = 2\log(3-x)$

Podmínky: argument log musí být kladný, tj.

$x^2+1 > 0$ a $3 - x > 0$

platí vždy $\iff \underline{\underline{3 > x}}$

Hledáme $x \in (-\infty, 3)$. Vzoreček na mocnění a úpravy:

$$\log(x^2+1) = \log(3-x)^2$$

$$\log(x^2+1) = \log(x^2 - 6x + 9)$$

Fce log je rostoucí, stačí zkoumat rovnost argumentů (či aplikovat fci e^x)

$$x^2 + 1 = x^2 - 6x + 9$$

$$6x = 8$$

$$\underline{\underline{x = 4/3}} \quad (< 3 \checkmark)$$

(c) $e^x + 12e^{-x} = 7$

Def. obor tře e^x je $\mathbb{R}$ a $e^{-x} = 1/e^x$,

přičemž $e^x > 0$ (a tedy $\neq 0$) na $\mathbb{R}$.

Žádné podmínky nejsou tedy třeba. Upravme:

$(e^x)^2 - 7e^x + 12 = 0$

$y := e^x$ ... $y^2 - 7y + 12 = 0$

$(y-4)(y-3) = 0$

$y = 4$ ... $\boxed{\log 4 = x}$

$y = 3$ ... $\boxed{\log 3 = x}$

(d) $1 - |\sin x| = \cos^2 x$. Definováno na $\mathbb{R}$

Je $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, tedy

$\sin^2 x - |\sin x| = 0$.

- $\sin x \geq 0 \iff x \in \langle 0 + 2k\pi ; \pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$

  Pak $|\sin x| = \sin x$, tj.

  $\sin x \, (\sin x - 1) = 0$

  - $\sin x = 0 \iff x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
  - $\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

  V relevantním intervalu tyto body leží.

- $\sin x < 0 \iff x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

  Pak $|\sin x| = -\sin x$, tj.

  $\sin x \, (\sin x + 1) = 0$

  - $\sin x = 0$ už máme všechny takové
  - $\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

    opět v tom intervalu

Dohromady $x \in \left\{ \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$

(c) $2\sin x + \cos x = 1$. Definováno na $\mathbb{R}$.

$$2\sin x - 1 = -\cos x$$

$$4\sin^2 x - 4\sin x + 1 - \cos^2 x = 0$$

$$\sin x\,(5\sin x - 4) = 0$$

- $\sin x = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = 4/5 \in (-1,1) \iff x = \arcsin 4/5 + 2k\pi$, $x = \pi - \arcsin 4/5 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Mocnili jsme $\longrightarrow$ je třeba zkoušku.

Ad. $x = k\pi$.

Vše je 2π-periodické, stačí ověřit řešení v intervalu $\langle 0, 2\pi)$.

$x = 0$ ... $2\cdot 0 + 1 = 1$ ✓ $\}$ $x = 2k\pi$ budou řešení

$x = \pi$ ... $2\cdot 0 - 1 \neq 1$ ✗

Ad. $x = \arcsin 4/5 + 2k\pi$. Stačí pro $k = 0$.

$\sin\varphi = x$, $x \in (0,1) \ni 4/5$

$\varphi = \arcsin x \implies \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

$$\cos(\arcsin 4/5) = \sqrt{1 - 16/25} = 3/5$$

Dosadíme do rovnice:

$2\cdot 4/5 + 3/5 = 8/5 + 3/5 \neq 1$ není řešením.

Ad. $x = \pi - \arcsin 4/5 + 2k\pi$. Stačí pro $k = 0$ $(\pi - \arcsin 4/5 \in \langle 0, 2\pi))$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y$$

$$\sin(\pi - \arcsin 4/5) = -\cos\pi \sin(\arcsin 4/5) = 4/5.$$

$$\cos(\pi - \arcsin 4/5) = \cos\pi\cos(\arcsin 4/5) + \underbrace{\sin\pi}_{=0}\sin\ldots$$

$$= -3/5$$

Dosadíme: $2\cdot 4/5 - 3/5 = 1$ ✓. Dohromady:

$$x \in \{2k\pi,\ \pi - \arcsin 4/5 + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

(f) $|x-4| + |2x-1| = |-x| + 3$ Definováno na celém $\mathbb{R}$.

	I		II		III		IV
$x-4$	$-$	0	$-$	$1/2$	$-$	4	$+$
$2x-1$	$-$		$-$		$+$		$+$
$-x$	$+$		$+$		$-$		$-$

Ad (I).
$$-x+4-2x+1 = -x+3$$
$$2 = 2x \quad \dots \quad x = 1 \notin I$$

Ad (II).
$$-x+4-2x+1 = x+3$$
$$2 = 4x \quad \dots \quad \underline{x = 1/2 \in II}.$$

Ad (III).
$$-x+4+2x-1 = x+3$$
$$3 = 3$$ Platí na celém (III).

Ad (IV).
$$x-4+2x-1 = x+3$$
$$-5 = 3$$ Neplatí.

Tedy $\underline{x \in \langle 1/2 ; 4 \rangle}$. (zjevně i krajní body)

(g) $2^{4x+1} + 3 \cdot 2^{2x+1} - 8 = 0$. Fce 2^x je def. $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$2 \cdot (2^{2x})^2 + 3 \cdot 2 \cdot (2^{2x}) - 8 = 0$$

Volme $y = 2^{2x}$ $\Rightarrow$ $y^2 + 3y - 4 = 0$
$$(y+4)(y-1) = 0$$

$y = 1 \dots \quad 1 = 2^{2x} \Rightarrow \underline{x = 0}$ Řešením je $x = 0$.

$y = -4 \dots -4 = 2^{2x} \Rightarrow$ x nelze nalézt ($2^x > 0$).

(h) $2\log_2^2 x = \log_2 8 - \log_2 x^5$. Potřebujeme $\underline{x > 0}$ (def. logarit.)

$2\log_2^2 x + 5\log_2 x = 3$ ... Označme $y = \log_2 x$

$2y^2 + 5y - 3 = 0$.

$y = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \log_2 x \dots$ $x = \sqrt{2}$

$y = -3 \Rightarrow -3 = \log_2 x \dots$ $x = 1/8$ (obojí > 0)

Příklad 2. v $\mathbb{R}$

(a) $$\frac{x+2}{x^2+3x-4} \geq \frac{3}{x-2}$$

Podmínky: • $x-2 \neq 0$, tj. $\underline{x \neq 2}$

• $x^2+3x-4 \neq 0$

$(x+4)(x-1) \neq 0$ … $\underline{x \neq 1}$, $\underline{x \neq -4}$

Tedy
$$\frac{x+2}{(x+4)(x-1)} - \frac{3}{x-2} \geq 0$$

$$\frac{x^2-4-3(x^2+3x-4)}{(x+4)(x-1)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{-2x^2-9x+8}{(x+4)(x-1)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{2x^2+9x-8}{(x+4)(x-1)(x-2)} \leq 0$$

Kořeny čitatele: $x_{1,2} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81+64}}{4} = -\dfrac{9}{4} \pm \dfrac{\sqrt{145}}{4}$

$x_1 = -9/4 - \dfrac{\sqrt{145}}{4} \sim -5{,}26$ $\quad (\sqrt{145} \sim 12{,}0)$

$x_2 = -9/4 + \dfrac{\sqrt{145}}{4} \sim 0{,}76$

Znaménka zlomku $\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x+4)(x-1)(x-2)}$?

$x_1 \qquad -4 \qquad x_2$ (~~0,76~~) $\qquad 1 \qquad 2$

−	+	+	+	+	+
−	−	−	+	+	+
−	−	+	+	+	+
−	−	−	−	+	+
−	−	−	−	−	+
⊖	⊕	⊖	⊕	⊖	⊕

Chceme „≤ 0"

Tedy $x \in (-\infty; x_1\rangle \cup (-4, x_2\rangle \cup (1, 2)$

připouštíme i 0 v čitateli

viz podmínky.

(b) $(x+2)(x-2) \le 2x-5$.

Podmínky žádné:

$x^2-4 \le 2x-5$

$x^2-2x+1 \le 0 \iff (x-1)^2 \le 0 \iff \underline{x=1}$.

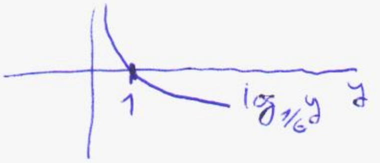
(c) $\log_{1/6}(x^2-3x+3) \le 0$ a $\log_6(x^2-3x+3) \le 0$.

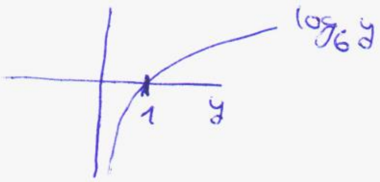
Argument fce log musí být kladný:

Tedy $x^2-3x+3>0$

Diskriminant je $\Delta = 9-12 < 0$

Platí tedy vždy.





Z grafu vidíme, že $\log_{1/6} y \le 0 \iff y \ge 1$

$\log_6 y \le 0 \iff y \le 1$

Tedy $\log_{1/6}(x^2-3x+3) \le 0 \iff x^2-3x+2 \ge 0$

$(x-2)(x-1) \ge 0$

⊕ ⊖ ⊕

$-\ 1\ -\ 2\ +$

$-\ \ +\ \ +$

Tedy $\underline{x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, \infty)}$

připouštíme rovnost.

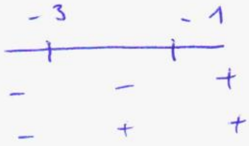
Obdobně $\log_6(x^2-3x+3) \le 0 \iff (x-2)(x-1) \le 0$

Tedy $x \in \langle 1, 2\rangle$.

Nebo aplikujeme fci $(1/6)^x$ resp. 6^x a víme, kdy se přehazují znaménka.

(d) $|x+1| - |x+3| < 1$

Podmínky zadané.



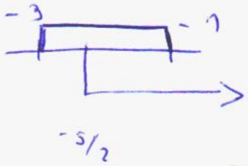
1) $x \in (-\infty, -3)$

$$-x-1+x+3 < 1$$

$2 < 1$ neplatí nikdy.

2) $x \in \langle -3; -1 \rangle$

$$-x-1-x-3 < 1$$
$$-5 < 2x$$
$$-5/2 < x$$



$x \in (-5/2; -1\rangle$

3) $x \in (-1, \infty)$

$$x+1-x-3 < 1$$

$-2 < 1$ platí vždy.

Dohromady $x \in (-5/2; -1\rangle \cup (-1, \infty) = \underline{(-5/2, \infty)}$.

(e) $\dfrac{x-2}{x+3} \geq |x+1|$. Potrebujeme $x \neq -3$.

1) $x \in \langle -1, \infty)$.

$$\frac{x-2}{x+3} - x - 1 \geq 0$$
$$\frac{x-2-x^2-3x-x-3}{x+3} \geq 0$$
$$\frac{-x^2-3x-5}{x+3} \geq 0$$
$$\frac{x^2+3x+5}{x+3} \leq 0$$

Diskriminant čitatele

$$\Delta = 9 - 20 < 0$$

Teda čitatel > 0 $\forall x \in \mathbb{R}$

Je teda potreba $x+3 < 0$

$x < -3$.

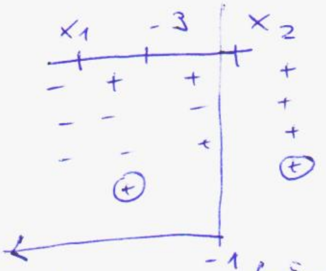
Ale $x \in (-\infty, -3) \cap \langle -1, \infty) = \emptyset$

2) $x \in (-\infty, -1)$

$$\frac{x-2}{x+3} + x + 1 \geq 0$$
$$\frac{x-2+x^2+4x+3}{x+3} \geq 0$$
$$\frac{x^2+5x+1}{x+3} \geq 0$$

Korene čitatele:

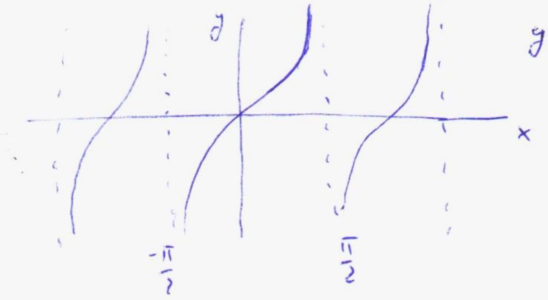
$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$



podmínky

Celkom $x \in \underline{\left\langle -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}; -3 \right)}$.

(f) $\tan(2x-1) \leq \sqrt{3}$



Potřebujeme $2x-1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

tj. $\underline{x \neq} \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

Označme $2x-1 =: z$, tj. řešíme $\tan z \leq \sqrt{3}$

Víme, že $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, tan je rostoucí na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Tedy $z \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right\rangle$ u ostatní sogueng, tj.

$$2x-1 = z \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi\right\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x \in}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(g) $(1/3)^{x^2-1} > 3 \cdot 9^{-|x|}$. Definováno $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$3 \cdot 3^{-x^2} > 3 \cdot 3^{-2|x|} \iff 3^{-x^2} > 3^{-2|x|}$$

3^x je rostoucí fce tedy $\iff -x^2 > -2|x|$

$x > 0$: $-x^2 > -2x$

$0 > x(x-2)$ ... $x \in (0,2)$

$x < 0$: $-x^2 > 2x$

$0 > x(x+2)$ ... $x \in (-2,0)$.

Celkem $\underline{\underline{x \in (-2,0) \cup (0,2)}}$.

(h) $||2x-1|-3| \le 2$

Podmínky žádné.

1) $2x-1 \ge 0$, tj. $x \ge 1/2$, pak je nerovnost ve tvaru

$$|2x-1-3| \le 2$$

$$|2x-4| \le 2$$

Tedy: $2x$ je od bodu 4 vzdáleno nejvýše o číslo 2.

$\Rightarrow 2x \in \langle 4-2; 4+2\rangle \Leftrightarrow \underline{\underline{x \in \langle 1; 3\rangle}}$

(a vždy $x \ge 1/2$ podmínka)

2) $2x-1 < 0$, tj. $x < 1/2$, pak je

$$|-2x+1-3| \le 2$$

$$|-2x-2| \le 2$$

Tedy $-2x$ je vzdáleno od 2 o nejvýše 2

$\Rightarrow -2x \in \langle 2-2, 2+2\rangle = \langle 0, 4\rangle$

$\Rightarrow \underline{\underline{x \in \langle -2; 0\rangle}}$

Celkem $\underline{\underline{x \in \langle -2, 0\rangle \cup \langle 1, 3\rangle}}$.

(i) $2 - \underbrace{\cos 2x}_{\cos^2 x - \sin^2 x} - 3\sin x < 0$. Definováno všude.

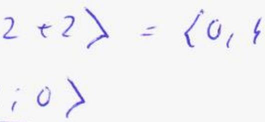
$\Leftrightarrow \sin^2 x - \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x} + 2 - 3\sin x < 0$

$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 < 0$. Píšu $y = \sin x$

$2y^2 - 3y + 1 < 0$. $\quad y_{1,2} = \frac{1}{4}\left(3 \pm \sqrt{9-8}\right) = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{\underline{y \in (1/2, 1)}}$.

Tedy $\sin x \in (1/2, 1)$

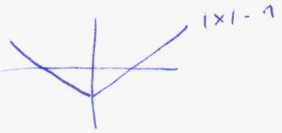


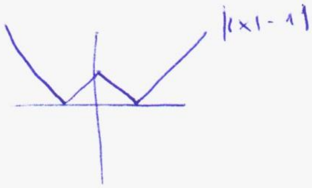
Tudíž $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right)$ + perioda.

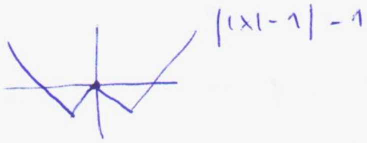
Celkem $\underline{\underline{x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}}}$; $k \in \mathbb{Z}$.

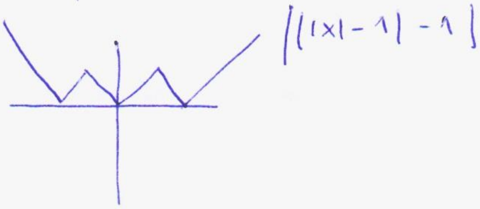
Příklad 3.

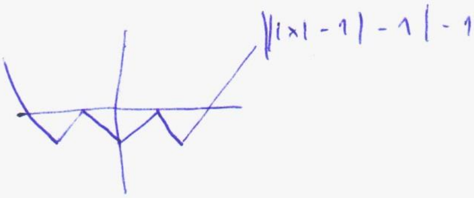
(a) $f(x) = |||x|-1|-1|-1|$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ (žádné podm.)

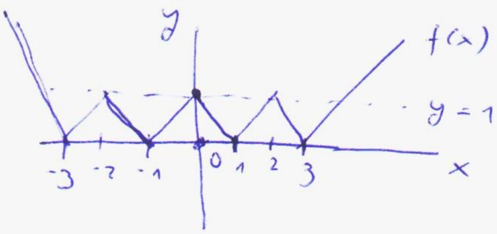
1) 

2) 

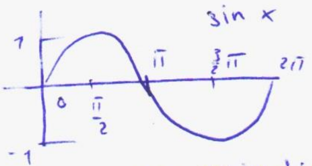
3) 

4) 

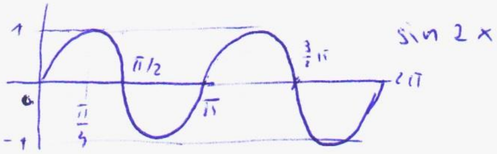
5) 

6) 

(b) $f(x) = 1 - |\sin 2x|$



$\leadsto$

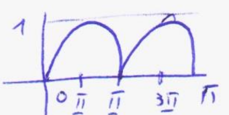


2π - periodický

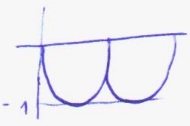
π - periodický.

Zjevně tedy f bude π - periodická.

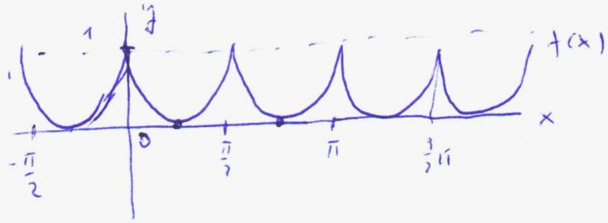
Graf stačí na $(0, \pi)$ ... zbytek se doplní periodicky.



$|\sin 2x|$ "skákající žabička"



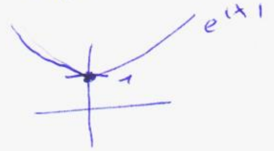
$-|\sin 2x|$ $\leadsto$



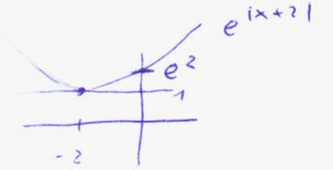
(c) $f(x) = \left| e^{|x+2|} - \pi \right|$, definováno na $\mathbb{R}$

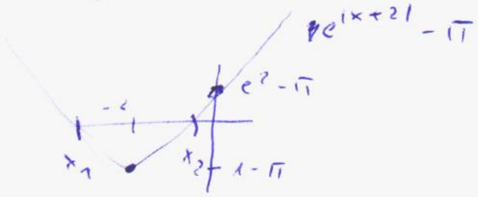
$e^{|x|} = e^{x}, \; x \geq 0$

$\phantom{e^{|x|} =} e^{-x}, \; x < 0$



$e^{|x+2|}$ ... posunutý argument (místo $x = 0$ teď $x = 2$)



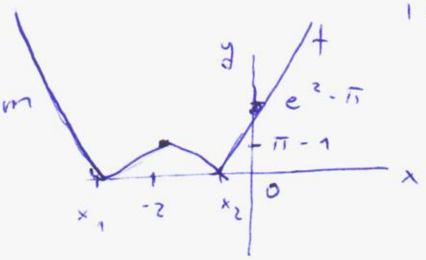


Průsečíky s osou x: $e^{|x+2|} - \pi = 0$

tedy $x_1 = -\log \pi - 2 \sim -3{,}1$

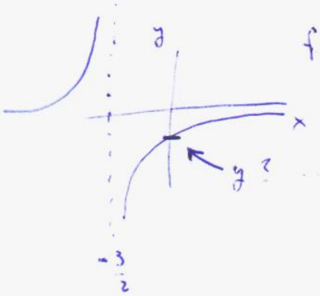
$ x_2 = \log \pi - 2 \sim -0{,}8$

Celkem



(d) $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x-1}{x+3/2} = \dfrac{1}{2} \dfrac{x + 3/2 - 5/2}{x + 3/2} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{5/2}{x+3/2}\right)$

Stačí vzít $\dfrac{-1}{x+3/2}$, pak se přeškáluje $\cdot \dfrac{5}{2}$, pak se posune nahoru o 1 a přeškáluje $\cdot \dfrac{1}{2}$.

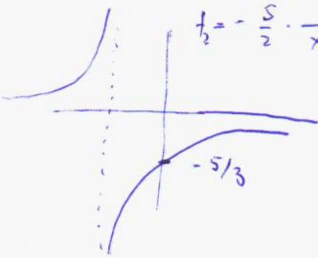


$f_1 = \dfrac{-1}{x+3/2}$

$f_1(0) = -1/(3/2) = -\dfrac{2}{3}$.

$\rightsquigarrow$

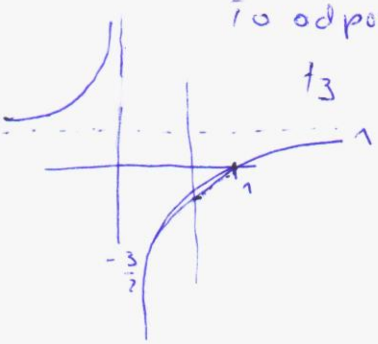
$f_2 = -\dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{x+3/2}$



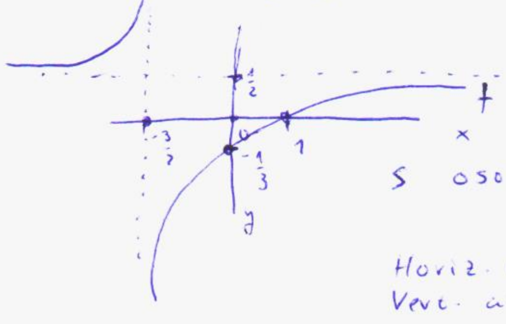
Teď posuneme, tedy $f_3 = f_2 + 1$. Průsečík s osou y bude $-\dfrac{2}{3}$

s osou x?

To odpovídá $f_3(x) = 0$ ... $x = 1$.



Nakonec $f = \frac{1}{2} f_3$.



S osou x: $x = 1$

y: $y = -\dfrac{1}{3}$

Horiz. asymptota $y = \dfrac{1}{2}$

Vert. as. $x = -3/2$

Příklad 4. V závislosti na $a \in \mathbb{R}$ řešte.

(a) $|x| + |x+1| < a$.

Je-li $a \leq 0$, tak žádné řešení není (neboť $|\cdot| \geq 0$)

Máme tedy dále $a > 0$.

	-1		0	
$-$		$-$		$+$
$-$		$+$		$+$

1) $x \in (-\infty, -1)$: $\quad -x - x - 1 < a$

$$\frac{1}{2}(-a-1) < x$$

$$\rightsquigarrow x \in (-\infty,-1) \cap \left(-\tfrac{1}{2}(a+1), \infty\right)$$

2) $x \in \langle -1, 0\rangle$: $\quad -x + x + 1 < a$

$$1 < a$$

Tedy pro $a \in (0,1\rangle$ žádné $x \in \langle -1,0\rangle$ není řešením

$a \in (1,\infty)$ všechna $x \in \langle -1, 0\rangle$ jsou řešením.

3) $x \in (0,\infty)$: $\quad x + x + 1 < a$

$$x < \frac{a-1}{2}$$

$$\rightsquigarrow x \in (0,\infty) \cap \left(-\infty, \frac{a-1}{2}\right).$$

Máme tedy:

- $a \in (0,1\rangle$ řešením je $x \in \left((-\infty,-1) \cap \left(-\tfrac{1}{2}\overbrace{(a+1)}^{\in \langle 1,2\rangle}, \infty\right)\right) \cup \left((0,\infty) \cap \left(-\infty, \underbrace{\tfrac{a-1}{2}}_{\frac{1}{2}(-1,0)}\right)\right)$

  $\iff x \in \emptyset$.

- $a > 1$ řešením je $x \in \left((-\infty,-1) \cap \left(\overbrace{-\tfrac{1}{2}(a+1)}^{\in(-\infty,-1)}, \infty\right)\right) \cup \left((0,\infty) \cap \left(-\infty, \overbrace{\tfrac{a-1}{2}}^{\in(0,\infty)}\right)\right) \cup \langle -1, 0\rangle$

  $\iff x \in \left(-\tfrac{1}{2}(a+1), -1\right) \cup \langle -1, 0\rangle \cup \left(0, \tfrac{1}{2}(a-1)\right)$

- $a \leq 0$ bez řešení.

(b) $ax^2 + 2x - a + 2 = 0$

- $a = 0$ ... $2x + 2 = 0$ tj. $\underline{x = -1}$
- $a \neq 0$ ... $x_{1,2} = \frac{1}{2a}\left[-2 \pm \sqrt{4 - 4a(2-a)}\right]$

$$= \frac{1}{a}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 2a + a^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{(a-1)^2}$$

speciálně pro $\underline{a = 1}$ dostaneme $\underline{x_1 = x_2 = -1}$,

jinak dvě řešení ve tvaru $-\frac{1}{a} \pm \frac{|a-1|}{a}$.

(c) $-1 < ae^x \leq 0$.

Jistě $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Vidíme tedy, že pro $a > 0$ nemůžou být obě (ani jedna) nerovnosti splněny.

Hraniční situace $a = 0$ se trivializuje

$$-1 < a \cdot e^x \overset{a=0}{=} 0 \leq 0.$$

Platí tedy $\forall x \in \mathbb{R}$.

Buď tedy $a < 0$. Potom

$$-1 < ae^x \leq 0 \quad \text{triviálně platí.}$$

$$\iff \quad -1/a > e^x \geq 0$$

Aplikuje fci log (rostoucí fce ... nemění se znaménka)

$$\log(-1/a) > x$$

Celkem:

$a = 0$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$a > 0$ $\quad$ žádné řešení

$a < 0$ $\quad x \in (-\infty, \log(-1/a))$.