Bonusové cvičení 15. 12.

Derivace

Příklad. (Zkuste s/bez l'Hospitala)

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1)}{\log x} = 1.$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0.$
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{x-\frac{\pi}{3}}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} = -1.$
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+\cos x}{(x-\frac{\pi}{4})^2} = +\infty.$
- $\lim_{x\to 0_+} x\log x = 0.$
- $\lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}} = 0.$

Příklad. (Zkouškové derivace)
Vyšetřete spojitost (i jednostrannou) a spočtěte derivaci zadané funkce v každém bodě, v němž existuje (i pouze jednostranná):

- $f(x) = \sqrt[3]{3^{|x^2-1|}-3}.$

$$\text{Vyjde } f'(x) = \begin{cases} \frac{\log 3\cdot 3^{|x^2-1|}\cdot 2x\cdot \operatorname{sgn}\,(x^2-1)}{3(3^{|x^2-1|}-3)^{\frac{2}{3}}}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0,\pm1,\pm\sqrt{2}\} \\ -\infty, & x\in\{-\sqrt{2},0_+\} \\ +\infty, & x\in\{\sqrt{2},0_-\} \\ -\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\log 3, & x\in\{1_-,-1_+\} \\ \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\log 3, & x\in\{1_+,-1_-\} \end{cases}.$$

- $f(x) = (x^3-2x^2+x)\cdot\left\lfloor \frac{4}{\pi}\arctan x\right\rfloor.$

$$\text{Vyjde } f'(x) = \begin{cases} -2\cdot(3x^2-4x+1), & x\in(-\infty,-1) \\ -(3x^2-4x+1), & x\in(-1,0) \\ 0, & x\in(0,1) \\ 3x^2-4x+1, & x\in(1,\infty) \\ 0, & x=1 \\ -1, & x=0_- \\ 0, & x=0_+ \\ -\infty, & x=-1_- \\ -8, & x=-1_+ \end{cases}.$$

- $f(x) = \cos(\max\{x,x^2\}).$

$$\text{Vyjde } f'(x) = \begin{cases} -\sin x, & x\in(0,1) \\ -2x\sin(x^2), & x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty) \\ 0, & x=0 \\ -\sin 1, & x=1_- \\ -2\sin 1, & x=1_+ \end{cases}.$$

- $f(x) = \begin{cases} (\tan x)^{|x^2-x|} \\ 1, \ \text{pro } x=0 \end{cases}.$

$$\text{Vyjde } f'(x) = \begin{cases} (\tan x)^{|x^2-x|}\left[\operatorname{sign}\,(x^2-x)(2x-1)\log\tan x + \frac{|x^2-x|}{\sin x\cdot\cos x}\right], & x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(k\pi,\frac{k\pi}{2}\right) \\ -\infty, & x=0_+ \\ \log\tan 1, & x=1_+ \\ -\log\tan 1, & x=1_- \end{cases}.$$