**Poznámky k písemkám**

Aktualizováno: 27. ledna 2023

**Obecné poznámky.**

- Numerické chyby a znaménka; zapomenuté zmínění (a případně odůvodnění) spojitosti při aplikaci některých vět; nezmínění použití (a případně ověření předpokladů) VOLSF; nekomentování limit typu $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}$ – tyto věci v dalších bodech neopakuji

- Úprava typu
$$\log^2(x+1)-\log^2(x-1)=\log^2\frac{x+1}{x-1}$$
rozhodně není v pořádku. Správně je
$$\begin{aligned}\log^2(x+1)-\log^2(x-1)&=[\log(x+1)-\log(x-1)]\cdot[\log(x+1)+\log(x-1)]\\&=\log\frac{x+1}{x-1}\cdot\log(x+1)(x-1).\end{aligned}$$

- Rozdíl funkcí cosinus se dá efektivně reprezentovat pomocí vzorce
$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta.$$
Podobně i rozdíly dalších goniometrických funkcí.

- S dolní celá část nějaké funkce $g(x)$ se dá často jednoduše pracovat v okamžiku, kdy si uvědomíme, že funkce $g$ je omezená a navíc zjistíme, kde má jaké hodnoty. Viz příklad, kdy $g(x)=\arctan x$ (ZS 2019/2020 C) nebo třeba $g(x)=\sin x$ (ZS 2004/2005 C) či letos $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Všechny tyto funkce je snadné nakreslit a vidět obor hodnot (můžeme například snadno spočíst extrémy). Pokud je $g$ neomezená, jako například $g(x)=x$ (ZS 2004/2005 D), tak je to nepříjemné, ale princip je stejný, k větvení ale dochází v nekonečně mnoha bodech a ne pouze v několika. Tohle se pojí i s nepochopením celé části, zápisy typu $\lfloor\frac{x}{x^2+1}\rfloor=\frac{k}{k^2+1}$ nedávají smysl, protože celá část něčeho musí být celé číslo.

- Jistě neplatí něco na způsob $\operatorname{sign}(x^2-x)=x^2-x$.

**Limity.**

- Vyskytují se zápisy typu
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{-x^2+1}=x\cdot\frac{x^2+\frac{1}{x}}{-x^2+1}=x,$$
které vůbec nedávají smysl. Jednak vypadne symbol limity. Dál je divné, když provádíme limitu v $x$ a výsledek by závisel na této proměnné.

- Je poněkud zbytečné (byť korektní) počítat limitu
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{-x^2+1}$$
pomocí l'Hospitalova pravidla.

- Chybné použití aritmetiky limit je třeba toto
$$1=\lim_{x\to\infty}1=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}x\cdot 0=\lim_{x\to\infty}0=0$$
a stejně tak
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{-x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{x^2+\frac{1}{x}}{-x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{-x^2+1}$$

nebo také

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\log(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\frac{\log(1+x)}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}\,.$$

Špatně je rovněž

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x^3}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

a

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-(2+\sin x)\log\left(1+\frac{\sin x}{2}\right)}{x^2(2+\sin x)}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-(2+\sin x)\log\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2(2+\sin x)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-(2+\sin x)\cdot\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\frac{1}{2}(2+\sin x)}{x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1-\frac{1}{2}\sin x}{x}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot x-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}\right)=-\frac{1}{4}\,.$$

V prvních třech případech šlo o "částečné limitění". Stejně tak v pátém. Ve čtvrtém použijete AL pro roztržení součtu, což bude korektní, pokud bude výsledek existovat, ale jelikož dostáváte rozdíl nekonečen, tak se to neděje. Pak se to pokusíte opět (chybně) slepit dohromady, a dostanete tak nulu. První případ je triviální, ve druhém případě se mohlo postupovat např. takto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{-x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1+\frac{1}{x^3}}{-1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)}=-\infty$$

a ve čtvrtém lze použít l'Hospital nebo je možné postupovat následovně

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}\,.$$

Ve třetím a pátém se použije l'Hospital (či Taylorovy rozvoje – nedělali jsme). Vyjde $\frac{1}{2}$ a $-\frac{1}{8}$. V pátém je ovšem v pořádku se zbavit $2+\sin x$ ve jmenovateli, to je použití AL.

- Limitu a $n$-tou odmocninu nejde "prohodit". Je třeba využít argumentaci dvou policajtů.
- Neznalost, či zmatek, ve vlastnostech elementárních funkcích. Funkce arctan rozhodně nemá limitu v $\pm\infty$ rovnu $\pm\infty$. Také je $\lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{1}{x}=0$ díky spojitosti a faktu, že $\arctan 0=0$. Obdobně je třeba umět pracovat s ostatními cyklometrickými funkcemi.
- Pokud při výpočtu limity pro $x\to+\infty$ provedete "substituci" $x=\frac{1}{y}$, tak řešíte limitu pro $y\to0_+$. A naopak ovšem také.
- V limitách obsahující výrazy jako $\log(e^n+\pi^n)$, $\log(x\cdot2^x+x\cdot\sin\sqrt{x})$ je obvykle potřeba identifikovat dominantní výraz v argumentu logaritmu. Ten vytknout a využít vlastnosti logaritmu (logaritmus součinu je součet logaritmů).
- Před tupým použitím l'Hospitalova pravidla je dobré se zamyslet. Mnohdy je limita prakticky elementární; mnohdy se vcelku snadnou úpravou a použitím AL výraz podstatně zjednoduší. Mimoto by se vždy měla okomentovat možnost jeho použití.

**Derivace.**

- Chybné derivování elementárních funkcí; derivací funkce $\tan x$ není ani jedna z funkcí:

$$\frac{1}{\sin^2 x},\ \frac{1}{\sin x}$$

a derivací funkce $\arctan x$ není ani jedna z funkcí:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ 1+x^2.$$

- Spletené znaménko u derivace podílu
- Zapomenuté derivování vnitřní funkce. Neplatí tedy, že
$$\left(\arctan\left(\frac{1}{\tan x}\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\tan x}\right)^2}$$
či
$$\left(\arctan\left(\frac{1}{\tan x}\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\tan x}\right)^2}\cdot\frac{-1}{\tan^2 x}.$$
Správně je
$$\left(\arctan\left(\frac{1}{\tan x}\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\tan x}\right)^2}\cdot\frac{-1}{\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}$$
$$= -\frac{1}{\cos^2\left(1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} = -1.$$
- Nenapsání toho, kde derivace dává smysl.
- Pokud máte funkci definovanou po větvích (ať už přímo nebo jakožto důsledek výskytu např. funkce signum), tak se dějí dvě věci. Zaprvé není spojitost automatická, a je tedy třeba ji komentovat. A derivováním získáme výsledek pouze na otevřených intervalech (bez krajních bodů) – ty je tedy třeba řešit zvlášť.
- Je-li funkce v nějakém bodě nespojitá, tak má stále smysl zkoumat derivaci (vyjde buď nevlastní či neexistující), je však potřeba užít definici a ne větu o výpočtu derivace pomocí limity derivací (ta vyžaduje spojitost).
- Absolutní hodnota něčeho se dá derivovat dvěma způsoby. Buď si rozdělíme funkci po jednotlivých intervalech dle znaménka a postupujeme jako u funkce definované "po větvích". Druhá možnost je využít funkci signum, musíme mít ale na paměti, že výsledek takto není definovaný pro ty body, kde je argument absolutní hodnoty nulový – tyto body je třeba řešit zvlášť (a budeme potřebovat vědět, jak se kde mění znaménka tohoto argumentu).
- Když spočítáte, že $f'_+(1) \neq f'_-(1)$, tak je dobré zmínit, že derivace v bodě 1 tedy neexistuje. Kdyby naopak byly stejné, tak říci, že derivace existuje a je rovna tomu, co jste spočetli.

**Průběhy.**

- Liché odmocniny jsou definované všude (na rozdíl od sudých).
- Inverzní goniometrické funkce nejsou periodické.
- Derivaci nemá smysl zkoumat v bodech, kde funkce není definovaná.
- Je potřeba spočítat derivaci ve všech bodech, kde ji dává smysl zkoumat. Pokud totiž $f'(1) = +\infty$, tak má $f$ dost podstatně rozdílné chování, než kdyby třeba $f'_\pm(1) = \pm 4$.
- Když určíte znaménka první či druhé derivace, tak je potřeba napsat, co z toho dedukujete – monotonie, konvexita, extrémy (a o jaký typ se jedná) a inflexní body.
- Pokud funkce $f$ není definována v bodě 2, tak psát, že je $f$ rostoucí na $\langle 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\rangle$ či na $\langle 2-\sqrt{2}, 2) \cup (2, 2+\sqrt{2}\rangle$ není správně. Správně je $\langle 2-\sqrt{2}, 2), (2, 2+\sqrt{2}\rangle$. Podobně intervaly konvexnosti.
- Pokud spočtete asymptotu, tak by měla být zanesena v grafu.
- Je potřeba uvést obor hodnot. Typicky je k tomu potřeba znát hodnoty v (alespoň v některých) bodech extrémů. Mělo by se zmínit, že se používá Věta o nabývání mezihodnot (Bolzano), ke které potřebujeme spojitost.
- Pokud je $f$ spojitá na $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ a $\lim_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$, tak z toho neplyne, že $\mathcal{H}_f = \mathbb{R}$.
- Občas je možné určit $\mathcal{H}_f$ na základě znalosti limit v krajních bodech. Ovšem typicky je potřeba nalézt extrémy a určit jejich hodnoty (porovnat). Nelze tedy říci, že obor hodnot funkce $e^{x+\frac{2}{x}}$ je kladná poloosa bez jedničky (na základě toho, že je nula vyloučena z definičního oboru).