I. Středoškolská matematika

Příklad 1. Řešte následující rovnice v $\mathbb{R}$:

(a) $\sin 2x = \cos x$

(b) $\log(x^2+1) = 2\log(3-x)$

(c) $e^x + 12e^{-x} = 7$

(d) $1 - |\sin x| = \cos^2 x$

(e) $2\sin x + \cos x = 1$

(f) $|x-4| + |2x-1| = |-x| + 3$

(g) $2^{4x+1} + 3\cdot 2^{2x+1} - 8 = 0$

(h) $2\log_2^2 x = \log_2 8 - \log_2 x^5$

(i) $3\cdot 9^{-t^2} = \frac{27^t}{9}$

(j) $\frac{|x|-2}{x+3} = \frac{x+1}{x-2}$

Příklad 2. Řešte následující nerovnice v $\mathbb{R}$:

(a) $\frac{x+2}{x^2+3x-4} \geq \frac{3}{x-2}$

(b) $(x+2)(x-2) \leq 2x-5$

(c) $\log_{\frac{1}{6}}(x^2-3x+3) \leq 0$

(d) $|x+1| - |x+3| < 1$

(e) $\frac{x-2}{x+3} \geq |x+1|$

(f) $\tan(2x-1) \leq \sqrt{3}$

(g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1} > 3\cdot 9^{-|x|}$

(h) $||2x-1|-3| \leq 2$

(i) $2 - \cos 2x - 3\sin x < 0$

(j) $\arccos(-x^2+4x-1) > \frac{\pi}{3}$

Příklad 3. Načrtněte grafy následujících funkcí:

(a) $f(x) = ||||x|-1|-1|-1|$

(b) $f(x) = 1 - |\sin 2x|$

(c) $f(x) = |e^{|x+2|} - \pi|$

(d) $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$

Příklad 4. Řešte (ne)rovnice v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$:

(a) $|x| + |x+1| < a$

(b) $ax^2 + 2x - a + 2 = 0$

(c) $-1 < ae^x \leq 0$

(d) $\cos^2 x + 2\sin x < a + 2$

Příklad 5. Ukažte, že platí:

(a) Známý vzoreček pro řešení kvadratické rovnice.

(b) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pro $q \neq 1$.

(c) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(d) $|a+b| \leq |a| + |b|$ a $||a|-|b|| \leq |a-b|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$.

Příklad 6. Připomeňte si klasické goniometrické identity:

(a) Vyjádřete funkci $\sin 4x$ (či $\cos 4x$) pomocí násobků $\sin x$ a $\cos x$ (a jejich mocnin).

(b) Odvoďte vztahy pro $\sin(\alpha \pm \beta)$ a $\cos(\alpha \pm \beta)$.

(c) Odvoďte vztahy pro dvojnásobné a poloviční úhly funkcí sin a cos.

(d) Pro $x > 0$ ukažte, že platí:

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin x + \arccos x\ , \quad \frac{\pi}{2} = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}\ , \quad \arctan\frac{1}{x} = \operatorname{arccot} x.$$

(e) Ukažte, že pro přípustná $x \in \mathbb{R}$ platí, že:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}\ , \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ , \quad \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

Příklad 7. Pomocí matematické indukce dokažte následující výroky.

(a) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n < 2^n$.

(b) Pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$ je $n^2 < 2^n$.

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x > -1$ platí nerovnost $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

(d) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

(e) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

(f) Součet prvních n lichých čísel je roven n^2.

(g) Pro jakékoliv $n \in \mathbb{N}$ lze číslo 13^n lze napsat jako součet dvou druhých mocnin nějakých přirozených čísel.

(h) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Výsledky - I. Středoškolská matematika

Příklad 1.

(a) $x \in \{\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) $x = \frac{4}{3}$.

(c) $x \in \{\log 3, \log 4\}$.

(d) $x \in \{\frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$.

(e) $x \in \{2k\pi, \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

(f) $x \in \langle \frac{1}{2}, 4 \rangle$.

(g) $x = 0$.

(h) $x \in \{\frac{1}{8}, \sqrt{2}\}$.

(i) $t = \frac{1}{4}[-3 \pm \sqrt{33}]$.

(j) $x \in \left\{\frac{1}{8}, -1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$.

Příklad 2.

(a) $x \in (-\infty, \frac{1}{4}(-9-\sqrt{145})] \cup (-4, \frac{1}{4}(-9+\sqrt{145})] \cup (1,2)$.

(b) $x = 1$.

(c) $x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$.

(d) $x \in (-\frac{5}{2}, \infty)$.

(e) $x \in [\frac{1}{2}(-5-\sqrt{21}), -3)$.

(f) $x \in (\frac{1}{2}(1-\frac{\pi}{2}) + \frac{k\pi}{2}, \frac{1}{2}(1+\frac{\pi}{3}) + \frac{k\pi}{2}], k \in \mathbb{Z}$.

(g) $x \in (-2,0) \cup (0,2)$.

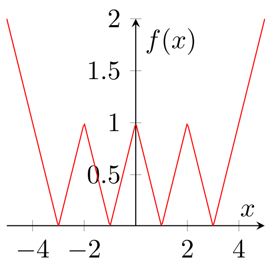
(h) $x \in [-2,0] \cup [1,3]$.

(i) $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right) \right]$.

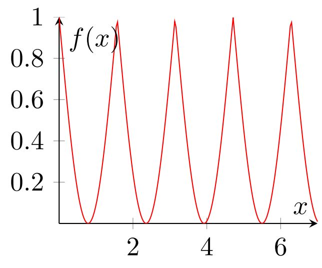
(j) $x \in \left[0, 2-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(2+\frac{\sqrt{10}}{2}, 4\right]$.

Příklad 3.

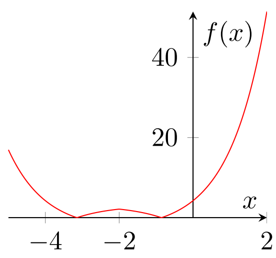
(a)



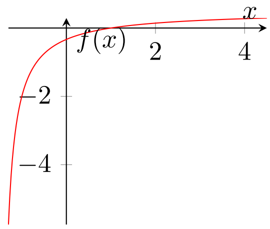
(b)



(c)



(d)



Příklad 4.

(a) $a \in (\infty, 0] \cup (0,1]:$ bez řešení, $a > 1 : x \in \left(-\frac{1}{2}(a+1), -1\right) \cup [-1, 0] \cup \left(0, \frac{1}{2}(a-1)\right)$.

(b)

$$\begin{aligned} a = 0 &: x = -1, \\ a = 1 &: x = -1, \\ a \notin \{0,1\} &: x_{1,2} = \frac{1}{a}\left[-1 \pm \sqrt{1-2a+a^2}\right]. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} a > 0 &: \text{ žádné řešení}, \\ a = 0 &: x \in \mathbb{R}, \\ a < 0 &: x \in \left(-\infty, \log\left(-\frac{1}{a}\right)\right). \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} a > 0 &: x \in \mathbb{R}, \\ a = 0 &: x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ a \leq -4 &: \text{ žádné řešení}, \\ a \in (-4, 0) &: x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\pi - \arcsin(1 - \sqrt{-a}) + 2k\pi, 2\pi + \arcsin(1 - \sqrt{-a}) + 2k\pi). \end{aligned}$$

Příklad 6. (a) Použijte Moivreovu větu.

(b) V jednotkové kružnici nakreslete rovnoramenné trojúhelníky s úhlem α a $\alpha - \beta > 0$. Vyjádřete délku zbývající strany.

(c) Pro první použijte (b). Pro druhé vztah pro cos dvojnásobného úhlu a základní trigonometrickou identitu.

(d) Nakreslete si pravoúhlý trojúhelník s vhodnými stranami (jedna bude mít délku 1).

(e) Nakreslete si pravoúhlý trojúhelník s vhodnými stranami (jedna bude mít délku 1).