II. Výroková logika

Příklad 1. Tabulkovou metodou dokažte, že jsou následující výroky tautologie, tzn. jsou vždy pravdivé (bez ohledu na pravdivostní hodnotu jednotlivých částí výroku):

(a) $\neg(\neg A) \iff A$. (Zákon dvojí negace)

(b) $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$. (Princip obměny)

(c) $A \vee (\neg A)$. (Princip vyloučení třetího)

(d) $\neg(A \Rightarrow B) \iff (A \wedge \neg B)$. (negace implikace)

(e) $(A \Rightarrow B) \iff (\neg A \vee B)$. (alternativa implikace)

(f) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. (tranzitivita implikace)

Příklad 2. Nechť M znační množinu všech mužů a Z množinu všech žen. Uvažujme nyní následující výrokové formy: $S(m, z)$: "Muž m je manželem ženy z", $L_1(m, z)$: "Muž m miluje ženu z", $L_2(m, z)$: "Žena z miluje muže m". Zapište nyní symbolicky (kvantifikátory, logické spojky a právě definované formy) následující výroky:

(a) Každý ženatý muž miluje svou manželku.

(b) Každou ženu miluje nějaký muž.

(c) Každá žena má nejvýše jednoho manžela.

(d) Každý muž má nejvýše jednu manželku. (Totéž co předchozí?)

(e) Existuje vdaná žena.

(f) Existuje ženatý muž. (Totéž co předchozí?)

(g) Existují nevěrné (tj. milují jiného muže než je jejich manžel) manželky.

Příklad 3. Znegujte následující výroky a rozhodněte o jejich pravdivosti:

(a) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} : z > x \Rightarrow z > y$.

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 0$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$.

(d) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$.

(e) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{Q} : y \leq x \wedge x < y + 1$.

(f) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N} : y \leq x \wedge x < y + 1$.

Příklad 4. Hádanky z ostrova poctivců a padouchů: Jdete kolem tří obyvatel ostrova (A, B a C) a položíte otázku: "Kolik je mezi vámi poctivců?".

(a) A něco zamumlá, a tak se zeptáte obyvatele B: "Co říkal A?“ B odpoví: "A říkal, že mezi námi je jediný poctivec.“ Nato řekne C: "Nevěřte B, ten lže!“ Co jsou B a C?

(b) Nyní A řekne: "Buď já jsem padouch nebo B je poctivec.“ Co jsou A a B?

(c) Dejme tomu, že A řekne: "Já jsem padouch, ale B ne.“ Co jsou A a B?

(d) A řekne: "B a C mají stejnou povahu.“ Nato se někdo zeptá C: "Mají A a B stejnou povahu?“ Co C odpoví?

Příklad 5. Určete množinu $\{a \in \mathbb{R}; (\forall x \in \mathbb{R})(|x - 2| \leq 1 \Rightarrow x^2 - ax > 5)\}$.

Příklad 6. Vyjádřete co nejjednodušeji následující výroky:

(a) $\forall \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - 7| < 5 \Rightarrow |f(x) - 15| < \varepsilon$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{1}{n}$.

Příklad 7. Nechť X, A, B jsou libovolné množiny. Dokažte následující výroky:

(a) $\emptyset \subset A$.

(b) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.

(c) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

(d) $(A \cap B = A) \iff A \subset B$.

(e) $X \cup (A \cup B) = (X \cup A) \cup B$.

(f) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.

Výsledky - II. Výroková logika

Příklad 2. (a) $\forall m \in M \forall z \in Z : S(m, z) \Rightarrow L_1(m, z)$.

(b) $\forall z \in Z \exists m \in M : L_1(m, z)$.

(c) $\forall z \in Z \forall m_1, m_2 \in M : (S(m_1, z) \wedge S(m_2, z)) \Rightarrow m_1 = m_2$.

(d) $\forall m \in M \forall z_1, z_2 \in Z : (S(m, z_1) \wedge S(m, z_2)) \Rightarrow z_1 = z_2$. (Nikoliv.)

(e) $\exists z \in Z \exists m \in M : S(m, z)$.

(f) $\exists m \in Z \exists z \in M : S(m, z)$. (Vskutku.)

(g) $\exists z_1, z_2 \in Z \exists m_1, m_2, m_3, m_4 \in M : (z_1 \neq z_2 \wedge m_1 \neq m_2 \wedge m_3 \neq m_4 \wedge S(m_1, z_1) \wedge L_2(m_2, z_1) \wedge S(m_3, z_2) \wedge L_2(m_4, z_2))$.

Příklad 3. (a) $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N} : z > x \wedge z \leq y$. Platí původní výrok.

(b) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y \geq 0 \wedge x + y < 0$. Platí negace.

(c) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y \neq 1$. Platí negace.

(d) $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y \neq 1$. Platí původní výrok.

(e) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{Q} : y > x \vee x \geq y + 1$. Platí původní výrok.

(f) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{N} : y > x \vee x \geq y + 1$. Platí negace.

Příklad 4. (a) B je padouch a C je poctivec.

(b) A i B jsou poctivci.

(c) A i B jsou padouši.

(d) Ano.

Příklad 5. Množinou je interval $(-\infty, -4)$.

Příklad 6. (a) $f(x) = 15, \forall x \in (2, 12)$.

(b) f je konstantní funkce na celé reálné ose.