III. Suprema a infima množin

Tvrzení (Připomenutí)**.** Buď $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ shora, resp. zdola, omezená množina. Pak má množina M supremum, resp. infimum.

Číslo $s \in \mathbb{R}$ se nazývá **supremum množiny** M (píšeme $s = \sup M$), jestliže platí:

(1) $\forall x \in M : x \leq s$ (s je horní závora M) a

(2) $\forall s' < s\ \exists x \in M : x > s'$ (s je nejmenší horní závora).

Pokud existuje číslo patřící do množiny M splňující (1), tak ho značíme $\max M$ (**maximum množiny** M). Podmínka (2) pak platí triviálně, tj. $\sup M = \max M$ (tj. suprema se nabývá).

Obdobně $i = \inf M \in \mathbb{R}$ je **infimum množiny** M, pokud platí:

(3) $\forall x \in M : x \geq i$ (i je dolní závora M) a

(4) $\forall i' > i\ \exists x \in M : x < i'$ (i je největší dolní závora).

Pokud existuje číslo patřící do množiny M splňující (3), tak ho značíme $\min M$ (**minimum množiny** M). Podmínka (4) pak platí triviálně, tj. $\inf M = \min M$ (tj. infnima se nabývá).

Platí tzv. **Archimedova vlastnost**, tj.: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x < n$.

V následujících příkladech najděte (existují-li) suprema a infima zadaných množin. Rozhodněte o (ne)existenci jejich maxim a minim.

Příklad 1.
(a) $A = \{q \in \mathbb{Q};\ q^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$.
(b) $B = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$.
(c) $C = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq 0\}$.
(d) $D = \{x \in \mathbb{R};\ x \sin x < 1\}$.
(e) $E = \{5, 6\}$.
(f) $F = \{1, -5, 7, -3, 50\}$.
(g) $G = \langle -2, 5)$.
(h) $H = (-2, 0\rangle \cup \{1\} \cup (\langle 2, 4\rangle \cap (3, 4))$.

Příklad 2.
(a) $A = \{x \in \mathbb{R};\ x^4 < 16\}$.
(b) $B = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 + 2x \leq 1\}$.
(c) $C = \{x \in \mathbb{R};\ \frac{1}{x-1} > 2\}$.
(d) $D = \{x \in \mathbb{R};\ ||x-1| - |x-2|| < 1\}$.
(e) $E = \{\arctan x;\ x > -1\}$.
(f) $F = \{\sin x;\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$.
(g) $G = \{\sin x;\ x \in (0, 2\pi)\}$.
(h) $H = \{\sin x;\ x \in (0, \pi)\}$.

Příklad 3.
(a) $A = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$.
(b) $B = \{\frac{n}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\}$.
(c) $C = \{\frac{n}{n+m};\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$.
(d) $D = \{n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N}\}$.
(e) $E = \{n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$.
(f) $F = \{n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$.
(g) $G = \{(-1)^n + \frac{1}{1+n};\ n \in \mathbb{N}\}$.
(h) $H = \{1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k};\ n \in \mathbb{N}\}$.

Příklad 4.
(a) $A = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$.
(b) $B = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{Z}\}$.
(c) $C = \{4^{(-1)^j 3^k};\ j, k \in \mathbb{Z}\}$.
(d) $D = \{\cos\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi;\ n \in \mathbb{N}\}$.
(e) $E = \{\cos\left(2n + \frac{1}{2n}\right)\pi;\ n \in \mathbb{N}\}$.
(f) $F = \{\cos\left(2n - 1 + \frac{1}{2n-1}\right)\pi;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Příklad 5. Buď $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ omezená množina a $B := \{|x-y|; x, y \in A\}$. Dokažte následující tvrzení:

(a) Množina B má supremum i infimum.
(b) Platí $\sup B = \sup A - \inf A$.
(c) Máme $\inf B = 0$.

Příklad 6. Představte si, že znáte pouze racionální čísla. Zkonstruujte $\sqrt{2}$.

(a) Chceme najít číslo splňující $a^2 = 2$, tj. $a = \frac{2}{a}$. Máme-li startovní aproximaci a_1 (např. 2), tak se nabízí zvolit další aproximaci pomocí průměru, tj. $a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$.
(b) Ukažte, že $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ má limitu. (Ukažte, že $a_n^2 > 2$ a $0 < a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.)
(c) Pomocí aproximativního vztahu nyní ukažte, že $(\lim_{n\to\infty} a_n)^2 = 2$.

Výsledky - III. Suprema a infima množin

Příklad 1.
(a) Supremum ani infimum v $\mathbb{Q}$ neexistuje (v $\mathbb{R}$ by to bylo $\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$) .
(b) $\sup B$ neexistuje, $\inf B = 0$, minimum neexistuje.
(c) $\max C = 0$, infimum neexistuje.
(d) Supremum ani infimum neexistuje.
(e) $\max E = 6, \min E = 5$.
(f) $\max F = 50, \min F = -5$.
(g) $\sup G = 5$, maximum neexistuje, $\min G = -2$.
(h) $\sup H = 4$, maximum neexistuje, $\min H = -2$.

Příklad 2.
(a) $\sup A = 2, \inf A = -2$, maximum ani minimum neexistuje.
(b) $\max B = -1 + \sqrt{2}, \min B = -1 - \sqrt{2}$.
(c) $\sup C = \frac{3}{2}, \inf C = 1$, maximum ani minimum neexistuje.
(d) $\sup E = 2$, maximum neexistuje, $\inf E = 1$, minimum neexistuje.
(e) $\sup D = \frac{\pi}{2}$, maximum neexistuje, $\inf D = -\frac{\pi}{4}$, minimum neexistuje.
(f) $\max F = 1, \min F = -1$.
(g) $\max G = 1, \min G = -1$.
(h) $\max H = 1, \inf H = 0$, minimum neexistuje.

Příklad 3.
(a) $\max A = 1, \inf A = 0$, minimum neexistuje.
(b) $\sup B = 1$, maximum neexistuje, $\min B = \frac{1}{2}$.
(c) $\sup C = 1, \inf C = 0$, maximum ani minimum neexistuje.
(d) Supremum ani infimum neexistuje.
(e) Supremum neexistuje, $\min E = 3$.
(f) $\max F = 0$, infimum neexistuje.
(g) $\max G = \frac{4}{3}, \inf G = -1$, minimum neexistuje.
(h) $\max H = \frac{2}{3}, \inf H = \frac{1}{2}$, minimum neexistuje.

Příklad 4.
(a) $\max A = \frac{5}{6}, \inf A = 0$, minimum neexistuje.
(b) Supremum neexistuje a $\inf B = 0$, minimum neexistuje.
(c) Supremum neexistuje a $\inf C = 0$, minimum neexistuje..
(d) $\max D = 1, \inf D = -1$, minimum neexistuje.
(e) $\sup E = 1$, maximum neexistuje a $\min E = 0$.
(f) $\max F = 1, \inf F = -1$, minimum neexistuje.