

## IV. Limity posloupností

### Shrnutí teorie.

**Definice.** (Limita posloupnosti) Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost reálných čísel a  $L \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $L$  je **vlastní limita posloupnosti**  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \varepsilon.$$

Posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  má limitu  $\infty$  (či  $-\infty$ ), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K \text{ (či } < K).$$

Limity jsou jednoznačně určené.

**Tvrzení.** (O vybrané posloupnosti) Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost reálných čísel s limitou  $A \in \mathbb{R}$ . Buď posloupnost  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  vybraná z posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Potom už  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = A$ .

**Tvrzení.** (Aritmetika limit) Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  jsou posloupnosti reálných čísel a mějme  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$ . Potom platí:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$ , má-li RHS smysl.
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$ , má-li RHS smysl.
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ , má-li RHS smysl.

**Tvrzení.** (Dva policajti / Sendvič) Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  jsou tři posloupnosti reálných čísel splňující

- (a)  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$  a
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \in \mathbb{R}$ ,

potom je  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$ .

**Tvrzení.** (Limita součinu omezené a mizející posloupnosti) Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  jsou posloupnosti reálných čísel splňující

- (a)  $\{a_n\}_n$  je omezená a
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ,

potom je  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$ .

**Tvrzení.** (O posloupnosti s kladnými členy) Buď  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  posloupnost kladných reálných čísel a  $m \in \mathbb{N}$ . Potom platí:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A$ .
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^m = a^m \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[m]{a}$ .

**Tvrzení.** (Růstové škály) Platí následující:

- (a) Pro  $n$  velká platí  $n^3 \leq 2^n \leq n! \leq n^n$ .
- (b) Pro  $a > 1$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ .
- (c) Pro  $1 > a > 0$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ .
- (d) Platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ .
- (e) Pro  $a > 0$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ .
- (f) Pro  $a > 1, b > 0$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$ .
- (g) Platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ .
- (h) Pro  $a > 0$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .
- (i) Platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .
- (j) Pro  $a > 0$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$ .

**Příklad 1.** [Elementární] Určete limity a ověřte je z definice:

- |  |   |   |
|--|---|---|
| (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2.$           | (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3.$                        | (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$ |
| (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n.$           | (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}.$              | (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log n.$             |
| (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}.$ | (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n}.$                     | (m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(-n).$        |
| (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n.$         | (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n.$ | (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^n.$                |
| (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} 7^n.$         | (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}.$                   | (o) $\lim_{n \rightarrow \infty} n!.$                 |

**Příklad 2.** [Skákající znaménka] Určete limity:

- |  |  |
|--|--|
| (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n.$                            | (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n.$                                  |
| (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}.$                  | (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi n).$                             |
| (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n.$                          | (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi n}{2}.$                    |
| (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi n) \cdot n^{\frac{3}{4}}.$ | (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}.$                        |
| (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$       | (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n + 1}{2}.$ |

**Příklad 3.** [Racionální funkce & odmocniny] Určete limity:

- |  |  |
|--|--|
| (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} -n^7 + 13n^4 - 123n + 12.$                                | (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}.$   |
| (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n - 6}{n+2}.$                                | (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt[3]{n}.$  |
| (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 2n^3 + n}{5n^4 + 2n^2}.$                      | (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$   |
| (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{2n^3 - n^2 + 2}.$                          | (m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-3} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2-1} - \sqrt{(n+2)^2}}.$                               |
| (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}}.$ | (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\sqrt{n^7}} + \sqrt[3]{n^7} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7} - \sqrt[3]{n^7}}.$               |
| (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n^3+1}}{n-1}.$                             | (o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}.$               |
| (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n-2}.$                                | (p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(2n+1)^{10} - (2n)^{10} - 1} - \sqrt{(2\sqrt{n+1})^{18} - 1}}{1 + \sqrt{n^9}}.$ |
| (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+11} + \sqrt{n}.$                                  | (q) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + \sqrt{n}} - \sqrt{n^3 - \sqrt{n}}}{n(\sqrt[3]{n^6+1} - \sqrt{n^4-1})}.$   |
| (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+11} - \sqrt{n}.$                                  |  |

**Příklad 4.** [Mocninné funkce &  $n$ -té odmocniny] Určete limity:

- |  |   |
|--|---|
| (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n.$   | (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 + 3^n + 2^n}.$  |
| (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}.$   | (m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3^n - n^3}.$  |
| (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{(5,0001)^n}.$  | (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}.$  |
| (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$   | (o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n + n} - n.$  |
| (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}.$  | (p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2} \cdot 2^n - \sqrt{3^n + 2^n}}.$                      |
| (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + n^7 + 1}{n^8 + n!}.$  | (q) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}.$  |
| (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}.$  | (r) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2n]{2^n + 5^n}}{2^n \sqrt[6n]{n}}.$                              |
| (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2i}{\sqrt[3]{n}} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n.$                                    | (s) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{2n}}.$                         |
| (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{2^n + n^2}}{(n+1)^n}.$   | (t) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}$    |
| (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n!}(2^{2n} - 3^n)}{\sqrt{(n+1)! + 2^n} - \sqrt{n! + 3^n}}.$                         | (u) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 3^n \sin 2^n}{5^n + 4^n \cos(n!)}}.$                    |
| (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2^{2n} + n^2} - \sqrt[3]{2^{3n} + 1}}{2^{-n}(\sqrt{n^8 + 2n^6} - \sqrt{n^8 + 1})}.$ | (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(n!) \sqrt[2n]{\frac{[18+36+\dots+18n]^n}{(3n+1)^{2n} + (n+3)^{2n}}}$ |

**Příklad 5.** [Trikové] Určete limity:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$ .  
 (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ .  
 (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}$ .  
 (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ .  
 (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ .  
 (f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n}$ .  
 (g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ .  
 (h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi\sqrt{4n^2 - n})$ .  
 (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n; a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, a_1 = \sqrt{2}$ .  
 (j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n; (2 - a_n)a_{n+1} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Příklad 6.** [Éčko] Určete limity:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .  
 (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$ .  
 (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ .  
 (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ .  
 (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ .  
 (f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ .

**Příklad 7.** [Celá část] Určete limity:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n$ .  
 (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor \sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n \rfloor$ .  
 (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor}$ .  
 (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor$ .  
 (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt{n^3+1} \rfloor + \lfloor \sqrt{n^3-1} \rfloor}{\sqrt[3]{1^n+2^n+\dots+n^n}}$ .  
 (f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + \dots + \lfloor n\sqrt{n} \rfloor}$ .

**Příklad 8.** [Zkouškové příklady] Určete limity:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt[4]{n^4+n^3}}{\sqrt{n^2+3n} - \sqrt[3]{n^3+2n}}$ .  
 (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\sqrt[n]{n^{2n} + (2n)^n}}{\sqrt[n]{n^{3n} + (3n)^n}}$ .  
 (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{99} - \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{33}}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^{99} - \left(8 + \frac{12}{n}\right)^{33}}$ .  
 (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^4 + \sqrt[3]{n}} - \sqrt[3]{n^4}\right) (\lfloor \sqrt[3]{n+1} \rfloor + \lfloor 2\sqrt[3]{n-1} \rfloor + \dots + \lfloor n\sqrt[3]{n+(-1)^{n+1}} \rfloor)$ .  
 (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n + \cos \frac{3}{n}}}{\sqrt[6]{n^2 + \sin \frac{2}{n}} - \sqrt[3]{n}}$ .  
 (f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{4n} + (4n)^n} \left( \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)^{18} - \left(4 + \frac{4}{n^2}\right)^9 \right)$ .  
 (g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^{48} + n} - \sqrt[3]{n^{48} + n^2}) ((n^3 + 3)^{12} - (n^4 + 4n)^9)$ .  
 (h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1^1 + 2^2 + \dots + n^n)}{\sqrt{n^4 + 2n^3} \log n - \sqrt{n^4 - n^3}}$ .  
 (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin(\sqrt{n^2 + \sin^2 n} - \sqrt{n^2 - \cos^2 n})}{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}$ .  
 (j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt[n]{n^{\log n} + e^n + (\log n)^{\sqrt{n}}} \right]$ .  
 (k)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 1} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan n \right)$ .  
 (l)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3^n + 1)}{\sqrt[3]{n^3 + 2n^2}}$ .  
 (m)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(10^{n^2} + 10^n + n^2) \sin \frac{2n}{n^3 + n}$ .  
 (n)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 + 15n)^{10} - (n^2 + 10)^{15}}{(n^3 + 2n^2 + 1)^9 - (n+1)^{27}}$ .  
 (o)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n + \left(\frac{3n+1}{n+3}\right)^n}$ .  
 (p)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\lfloor \sqrt[n]{n^{\log n} + \pi^n + \log \sqrt{n} n} \rfloor}$ .  
 (q)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2022)!}{n^{2022}} \cdot \frac{\sqrt{(n!)^2 + 2022^n} - \sqrt{(n!)^2 - n^{2022}}}{2022^n}$ .  
 (r)  $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n^6 - 2)^9 - (n^9 + 27)^6 + 18(n^8 + 2)^6) \cdot \left( \left(1 + \frac{1}{21n^5}\right)^7 - \left(1 + \frac{1}{16n^6}\right)^8 \right)^9$ .

## Výsledky - IV. Limity posloupností

### Tvrzení [Růstové škály]

- (a) Indukce a  $3n^2 + 3n + 1 \leq n^3$  pro  $n$  velká.
- (b) Z definice.
- (c) Z definice.
- (d) Triviální rozepsáním.
- (e) Rozepsání a Archimédova vlastnost. Nebo limitní podílové kritérium ( $a > 1$ ).
- (f) Limitní podílové kritérium.
- (g) Ukažte  $n! \geq n^{\frac{n}{2}}$  pro  $n$  sudé a  $n! \geq n^{\frac{n-1}{2}}$  pro  $n$  liché.
- (h) Bernoulliho nerovnost pro  $x = \sqrt[n]{a} - 1$  a exponent  $n$ .
- (i) Bernoulliho nerovnost pro  $x = \sqrt[n]{a} - 1$  a exponent  $\frac{n}{2}$ , nebo  $\frac{n-1}{2}$ .
- (j) Triviálně pomocí (i).

### Příklad 1. [Elementární]

- |                |                |                |                        |
|----------------|----------------|----------------|------------------------|
| (a) 2.         | (e) $\infty$ . | (i) 0.         | (m) $-\frac{\pi}{2}$ . |
| (b) $\infty$ . | (f) $\infty$ . | (j) $\infty$ . | (n) $\infty$ .         |
| (c) 0.         | (g) 0.         | (k) 0.         | (o) $\infty$ .         |
| (d) $\infty$ . | (h) 0.         | (l) $\infty$ . |                        |

### Příklad 2. [Skákající znaménka]

- |                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| (a) Neexistuje. | (f) Neexistuje. |
| (b) 0.          | (g) 0.          |
| (c) Neexistuje. | (h) Neexistuje. |
| (d) Neexistuje. | (i) 0.          |
| (e) 0.          | (j) Neexistuje. |

### Příklad 3. [Racionální funkce & odmocniny]

- |                     |                |                     |                           |
|---------------------|----------------|---------------------|---------------------------|
| (a) $-\infty$ .     | (f) 0.         | (k) $\infty$ .      | (p) $32(\sqrt{5} - 16)$ . |
| (b) $\infty$ .      | (g) 1.         | (l) Neexistuje.     | (q) 2.                    |
| (c) $\frac{1}{5}$ . | (h) $\infty$ . | (m) 0.              |                           |
| (d) 0.              | (i) 0.         | (n) $\frac{2}{3}$ . |                           |
| (e) $\frac{1}{2}$ . | (j) 0.         | (o) $\frac{1}{2}$ . |                           |

### Příklad 4. [Mocninné funkce & $n$ -té odmocniny]

- |                     |                     |                            |                            |
|---------------------|---------------------|----------------------------|----------------------------|
| (a) $\infty$ .      | (g) 1.              | (m) 4.                     | (r) $\frac{5}{\sqrt{6}}$ . |
| (b) 0.              | (h) 0.              | (n) 0.                     | (s) 0.                     |
| (c) 0.              | (i) 0.              | (o) 0.                     | (t) $\frac{2}{3}$ .        |
| (d) $\frac{1}{3}$ . | (j) $\infty$ .      | (p) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . | (u) $\frac{4}{5}$ .        |
| (e) 0.              | (k) $\frac{1}{2}$ . | (q) 1.                     | (v) $\frac{\pi}{2}$ .      |
| (f) 0.              | (l) 3.              |                            |                            |

### Příklad 5. [Trikové příklady]

(a)  $-\frac{1}{2}$ .

(b)  $\frac{1}{2}$ .

(c)  $\frac{1}{3}$ .

(d) 1.

(e) 1.

(f) 0.

(g)  $\frac{1}{2}$ .

(h)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(i) 2.

(j) 1.

**Příklad 6.** [Éčko]

(a)  $e$ .

(b)  $e^2$ .

(c)  $\sqrt{e}$ .

(d)  $\frac{1}{e}$ .

(e)  $\frac{1}{e^2}$ .

(f) 1.

**Příklad 7.** [Celá část]

(a) 1.

(b) 0.

(c) 2.

(d)  $\frac{\pi}{2}$ .

(e)  $\infty$ .

(f) 2.

**Příklad 8.** [Zkouškové příklady]

(a)  $\frac{1}{6}$ .

(b) 1.

(c)  $2^{-97}$ .

(d)  $\frac{1}{6}$ .

(e)  $\frac{9}{2}$ .

(f)  $9 \cdot 2^{16}$ .

(g)  $-6$ .

(h) 1.

(i)  $\frac{1}{2}$ .

(j) 2.

(k) 1.

(l)  $\log 3$ .

(m)  $2 \log 10$ .

(n)  $\frac{125}{3}$ .

(o) 3.

(p) Neexistuje.

(q)  $\frac{1}{2}$ .

(r)  $-\frac{2}{243}$ .