V. Limity funkcí

Shrnutí teorie.

Definice. *(Limita funkce) Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}^*$ je limitou reálné funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ (tento fakt zapisujeme jako $\lim_{x\to c} f(x) = A$), jestliže platí*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_\delta(c) : f(x) \in B_\varepsilon(A).$$

Přičemž pro reálná $c \in \mathbb{R}$ symbol $P_\delta(c)$ značí množinu $(c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$, tj. prstencové δ-okolí bodu c. Podobně $B_\delta(c)$ reprezentuje $(c-\delta, c+\delta)$, tj. δ-okolí bodu c. Pro c z rozšířené reálné přímky značíme $P_\delta(+\infty) = (\frac{1}{\delta}, +\infty) = B_\delta(+\infty)$, podobně i okolí bodu $-\infty$.

Limity jsou jednoznačně určené. Dále je dobré vědět co je spojitost funkce v bodě. Souvislost s jednostrannými limitami. Opět platí věta o aritmetice limit jako u posloupností a také věta o limitě a uspořádání, jejímž důsledkem je věta o dvou policajtech. Máme ale dvě nové věty:

Tvrzení. *(Heine) Nechť $c, A \in \mathbb{R}^*$ a pro reálnou funkci f platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$. Buď $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost prvků z $\mathcal{D}_f$ taková, že $x_n \neq c, \forall n \in \mathbb{N}$, a splňující $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$. Potom platí $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A$.*

Příklad. Víme-li, že $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, tak dle této věty máme, že i $\lim_{n\to+\infty} n \sin\frac{1}{n} = 1$, neboť vezmeme posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, která má za limitu číslo 0.

Tvrzení. *(Limita složené funkce) Buď $c, A, B \in \mathbb{R}^*$ a pro reálné funkce f a g nechť platí $\lim_{x\to c} g(x) = A$ a $\lim_{y\to A} f(y) = B$. Nechť dále platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

(P) $\exists \delta > 0\ \forall x \in P_\delta(c) : g(x) \neq A$.

(S) Funkce f je spojitá v bodě A.

Potom je $\lim_{x\to c} f(g(x)) = B$.

Příklad. (P) Položme $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, máme $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$. Vezměme třeba $g(x) = x^2 - 1$, máme $\lim_{x\to -1} g(x) = 0$. Vidíme, že na nějakém malém prstencovém okolí bodu -1 je g různá od 0. Platí tedy podmínka (P) výše, a platí proto $\lim_{x\to -1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} = 1$. Poznamenejme, že f není v nule spojitá. Není tam totiž ani definovaná.

Příklad. (S) Tentokrát vezměme funkci $f(y) = e^y$, pak $\lim_{y\to 1} f(y) = e$. Podmínka (S) je zjevně splněna. Takže $\lim_{x\to c} e^{g(x)} = e$, kdykoliv $\lim_{x\to c} g(x) = 1$, třeba $g(x) = \frac{x}{x-1}$ a $c = +\infty$.

Tvrzení. *(Známé limity) Z přednášky víme, že*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Jednoduchým důsledkem jsou limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\ .$$

Navíc známe limity v krajních bodech definičních oborů funkcí $\exp, \log, \tan, \cot, \arctan, \operatorname{arccotg}$.

Nakonec se hodí znát, že obecná mocnina se pro $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$ zavádí jako $a^b = e^{b \log a}$.

Příklad. Toto můžeme využít třeba k výpočtu jiné elementární limity. Je

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \exp\left[x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] \overset{\text{spojitost}}{=} \exp\left[\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right] \overset{\text{VOLSF(P)}}{=} e.$$

Známe-li derivace, tak máme ještě jeden, někdy užitečný, výsledek.

Tvrzení. *(l'Hospital) Nechť funkce f a g mají na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní derivace a existuje $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Nechť platí jedna z podmínek:*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$,
2. $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$.

Potom existuje i limita podílu funkcí f a g a platí rovnost $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Příklad. Přímočaře dostaneme $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$.

Příklad. Kdyby $\nexists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, stane se: $1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sin x}{1} =$ neexistuje.

Příklad 1. [Elementární] Určete limity a ověřte je z definice:

(a) $\lim_{x\to 0} x$.
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.
(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+2}$.
(d) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$.
(e) $\lim_{x\to 0_+} \sqrt{x}$.
(f) $\lim_{x\to 4}(x^2+x-11)$.

Příklad 2. [Spojitost, základní vlastnosti, rac. funkce] Určete limity:

(a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan x$.
(b) $\lim_{x\to-\infty}(x+2)^2$.
(c) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}$.
(d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{7+x}$.
(e) $\lim_{x\to-7} \frac{-3}{7+x}$.
(f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log x+1}$.
(g) $\lim_{x\to 1} \lfloor x\rfloor - x$.
(h) $\lim_{x\to 0} x\cdot\lfloor \frac{1}{x}\rfloor$.
(i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x-1}$.
(j) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$.
(k) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x+5-\frac{1}{x}}{8x^3+4x^2-3}$.
(l) $\lim_{x\to 2} \log(x-3)$.
(m) $\lim_{x\to 1_+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.
(n) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x}{2x^3+x^2-3x}$.
(o) $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.
(p) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.
(q) $\lim_{x\to+\infty} x+\sin x$.

Příklad 3. [Odmocniny] Určete limity:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.
(b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.
(c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x}$.
(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.
(e) $\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.
(f) $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.
(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.
(h) $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{9+x}-2}$.
(i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x-1}}$.
(j) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.
(k) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$.
(l) $\lim_{x\to 0_+} \sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}$.
(m) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}]$.
(n) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-2x-\frac{1}{x}}{3x^2+3}}$.

Příklad 4. [Goniometrické funkce] Určete limity:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2}$.
(c) $\lim_{x\to 0_+} \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{8x}}$.
(d) $\lim_{x\to 0} \log\frac{x}{\sin x}$.
(e) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{1-\cos 4x^2}$.
(f) $\lim_{x\to 0} x\cdot\cot 3x$.
(g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$.
(h) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$.
(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.
(j) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.
(k) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.
(l) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.
(m) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.
(n) $\lim_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.
(o) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.
(p) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.
(q) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\cdot\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.
(r) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x^2)}}{1-\cos x}$.
(s) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.
(t) $\lim_{x\to 0} x\sqrt{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}$.
(ť) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\sin x)}$.
(u) $\lim_{x\to 1_-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$.
(v) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{(x-\frac{\pi}{4})^2}$.
(w) $\lim_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1})$.
(x) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^5}}}{\arcsin(\sqrt{x^5+1}-\sqrt{x^5-1})}$.
(y) $\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(\sqrt{x^4+3x^3}-\sqrt{x^4-3x^3})\right]$.
(z) $\lim_{x\to 0_+} \frac{\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sin x}$.
(ž) $\lim_{x\to 2_+} \frac{\operatorname{arccotg}\frac{1}{4x-8}}{e^{x-1}-e}$.

Příklad 5. [Mocninné funkce & logaritmy] Určete limity:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)}{x}$.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{\log(1-x^2)}$.

(c) $\lim_{x\to 5} |-e^{-\frac{1}{x}}|$.

(d) $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{3-x}}$.

(e) $\lim_{x\to +\infty} x\log\left(1-\frac{3}{x}\right)$.

(f) $\lim_{x\to +\infty} x\log\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$.

(g) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\log(1+3^x)}{\log(1+2^x)}$.

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{\log\cos x}{x^2}$.

(i) $\lim_{x\to +\infty} x(\log(x+1)-\log x)$.

(j) $\lim_{x\to +\infty} \log(1+2^x)\cdot\log\left(1+\frac{3}{x}\right)$.

(k) $\lim_{x\to 1_-} \frac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\arccos x}$.

(l) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1-x+x^2)}{\log(x^{10}+x+1)}$.

(m) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\log(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$.

(n) $\lim_{x\to \infty} \frac{\log(1+3^x)}{\log(1+2^x)}$.

(o) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

(p) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x^3-\arctan x)}{\log(x^2+\arctan x)}$.

(q) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{\log(x^2+4)-\log(x^2)}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}$.

(r) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x\sin x}}{e^{x^2}-1}$.

(s) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{x-1}+\sqrt[3]{\cos(\pi x)}}{\log^2 x}$.

Příklad 6. [Exponenciální trik] Určete limity:

(a) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x)(1-\sqrt{x})}$.

(b) $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

(c) $\lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)^x$.

(d) $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2}{x^2}\right)^x$.

(e) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

(f) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

(g) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$.

(h) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

(i) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1+\log x}{\log x}\right)^{\log x}$.

(j) $\lim_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\cot^2 x}$.

(k) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}+} \left(\tan\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right)^{\tan 2x}$.

(l) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

(m) $\lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

(n) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

(o) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$.

(p) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

(q) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$.

(r) $\lim_{x\to 0_+} (e^x-1)^{\frac{\tan^2 x}{x}}$.

(s) $\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^x-\sqrt{1+\sin^3 x}}{x^3}$.

Příklad 7. [Heine] Určete limity:

(a) $\lim_{n\to +\infty} n\cdot\sin\frac{n+1}{2n^2+1}$.

(b) $\lim_{n\to +\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$.

(c) $\lim_{n\to +\infty} \sqrt{4n^2+1}\log\left(\frac{2+n}{1+n}\right)$.

(d) $\lim_{x\to +\infty} \sin x$.

(e) $\lim_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x}$.

(f) $\lim_{x\to +\infty} x^2\sin x$.

(g) $\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

(h) $\lim_{x\to \infty} e^x\sin x$.

(i) $\lim_{x\to \pi} 3^{\frac{1}{\sin x}}$.

(j) $\lim_{n\to \infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n+\cos\frac{3}{n}}}{\sqrt[6]{n^2+\sin\frac{2}{n}}-\sqrt[3]{n}}$.

(k) $\lim_{n\to \infty} \frac{\arcsin(\sqrt{n^2+\sin^2 n}-\sqrt{n^2-\cos^2 n})}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}$.

(l) $\lim_{n\to \infty} \sqrt{n^2+1}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)$.

(m) $\lim_{n\to \infty} \frac{\log(3^n+1)}{\sqrt[3]{n^3+2n^2}}$.

(n) $\lim_{n\to \infty} \log(10^{n^2}+10^n+n^2)\sin\frac{2n}{n^3+n}$.

Příklad 8. [Parametry]

(a) V závislosti na $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ spočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$.

(b) V závislosti na $m,n\in\mathbb{N}$ spočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$.

(c) V závislosti na $\alpha\in\mathbb{R}$ spočtěte limitu $\lim_{x\to 0_+} (e^x-1)^{\frac{\tan^2 x}{x^\alpha}}$.

(d) V závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$ spočtěte limitu $\lim_{x\to 1_-} \frac{\arccos x}{(1-x)^\alpha}$.

(e) V závislosti na $k \in \mathbb{Z}$ spočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)} \cdot x^k$.

(f) Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ je $2 = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{\tan x}\right)^{\frac{\alpha}{\tan x - \cot x}}$?

Příklad 9. [Zkouškové příklady] Určete limity:

(a) $\lim_{x\to 0}(1+\cos x-\cos^2 x)^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}}$.

(b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(2\sin^2 x)^{\frac{1}{\sin x-\cos x}}$.

(c) $\lim_{x\to 0_+} \frac{x^{4x}+(4x)^x-2}{(2x)^x-1}$.

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{1+\sin^2 x}}{\log(\cos x)}$.

(e) $\lim_{x\to 0_+} \left(\frac{1+\sqrt{\tan x}}{\cos\sqrt{x}}\right)^{\frac{\sqrt{1-\sqrt{\sin x}}-\sqrt{1+\sqrt{\tan x}}}{x}}$.

(f) $\lim_{x\to 0} \left(\cos x + \frac{1}{\cos x} - 1\right)^{\frac{1}{\sin(x^4)}}$.

(g) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{4^{\tan x}+\cos x}{2}\right)^{\cot x}$.

(h) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(2\sin x)^{\frac{2}{\pi-6x}}$.

(i) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log(x+1)}{\log(x-1)}\right)^{x\log x}$.

(j) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(2\cos x)^{\frac{\sqrt{3}}{\pi-3x}}$.

(k) $\lim_{x\to 1} \frac{4^{2^x}-16}{\sqrt{1-\cos(2\pi x)}}$.

(l) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)^{\cot^2(\pi x)}$.

(m) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^{\frac{\pi}{x\cdot\operatorname{arccotg}^2 x}}$.

(n) $\lim_{x\to 0} \frac{2^{\cos x}-2\cdot 3^{\sin^2 x}}{\arctan(\cot(x^2))-\frac{\pi}{2}}$.

(o) $\lim_{x\to 0_+} \left((\tan x)^{\sin x}\right)^{\frac{1}{\arcsin x\cdot\log x}}$.

(p) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x-\sin x}{e^x-x-\cos x-x^2}$.

(q) $\lim_{x\to 0_+} \left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}}$.

(r) $\lim_{x\to 0_+} \frac{\sqrt[3]{x^3\cos x}-x}{x\cdot\cos(\arctan(\frac{1}{x^2}))}$.

(s) $\lim_{x\to+\infty} \left(\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x^2+\operatorname{arccotg} x}-x}}$.

(t) $\lim_{x\to 1} \left(\log x-\cos(\pi\sqrt{x})\right)^{\frac{1}{\arctan x-\operatorname{arccotg} x}}$.

(u) $\lim_{x\to 0_+} \frac{\cos(\log(x^3+x))-\cos(\log(2x^3+x))}{\sqrt{\arcsin x}\arctan(\sin x)}$.

Příklad 10. [Teoretické příklady na zaplnění místa]

(a) Čemu se rovná limita spojité a liché funkce v 0?

(b) Najděte lichou funkci, která nemá v 0 limitu.

(c) Předpokládejme, že má omezená, lichá funkce v 0 limitu. Čemu se tato limita rovná?

(d) Nechť má reálná funkce f v bodě x_0 vlastní limitu L. Ukažte, že potom platí

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |L|.$$

(e) Buď $f : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$ funkce, která není konstantní. Definujme funkci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = f(\sin x)$. Dokažte, že neexistuje $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

(f) Mějme reálnou funkci f splňující $f(x) \geq 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Buď $x_0 \in \mathbb{R}$ bod ve kterém existuje limita

$$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{1}{\sqrt{f(x)}} + \sqrt{f(x)}\right].$$

Ukažte, že potom existuje i limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

(g) Ukažte, že Dirichletova funkce

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

není spojitá v žádném bodě.

(h) Ukažte, že Riemannova funkce

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ pro } p, q \text{ nesoudělná celá čísla} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

je spojitá v iracionálních bodech (a v racionálních je spojitá).

Výsledky - V. Limity funkcí

Příklad 1. [Elementární]

(a) 0.
(b) Neexistuje. Vyjde $\pm\infty$.
(c) 1.
(d) ∞.
(e) 0.
(f) 9.

Příklad 2. [Spojitost, základní vlastnosti, rac. funkce]

(a) 1.
(b) $+\infty$.
(c) 0.
(d) 0.
(e) Neexistuje.
(f) 0.
(g) Neexistuje.
(h) 1.
(i) 6.
(j) Neexistuje.
(k) $\frac{1}{8}$.
(l) Neexistuje.
(m) $+\infty$.
(n) $\frac{2}{3}$.
(o) $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$.
(p) 6.
(q) $+\infty$.

Příklad 3. [Odmocniny]

(a) 1.
(b) -1.
(c) 0.
(d) $\frac{1}{2}$.
(e) $\frac{1}{144}$.
(f) $\frac{1}{2}$.
(g) $\frac{3}{2}$.
(h) $\frac{112}{27}$.
(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
(j) $\frac{4}{3}$.
(k) $\frac{1}{2}$.
(l) 1.
(m) $\frac{4}{3}$.
(n) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Příklad 4. [Goniometrické funkce]

(a) 5.
(b) 3.
(c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
(d) 0.
(e) $\frac{1}{8}$.
(f) $\frac{1}{3}$.
(g) 0.
(h) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
(i) $\frac{1}{2}$.
(j) 2.
(k) -1.
(l) 4.
(m) $\frac{1}{2}$.
(n) $\cos a$.
(o) -3.
(p) $\frac{1}{4}$.
(q) $\frac{4}{3}$.
(r) $\sqrt{2}$.
(s) $-\frac{1}{12}$.
(t) 0.
(ť) 1.
(u) $\sqrt{2}$.
(v) Neexistuje.
(w) 0.
(x) 1.
(y) $\frac{1}{3}$.
(z) 2.
(ž) $\frac{4}{e}$.

Příklad 5. [Mocninné funkce & logaritmy]

(a) 3.
(b) -1.
(c) $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$.
(d) 1.
(e) -3.
(f) 0.
(g) 0.
(h) $-\frac{1}{2}$.
(i) 1.
(j) $3\log 2$.
(k) e.
(l) $\frac{1}{5}$.
(m) $\frac{3}{2}$.
(n) $\frac{\log 3}{\log 2}$.
(o) $\frac{1}{2}$.
(p) $\frac{3}{2}$.
(q) 2.
(r) $+\infty$.
(s) $1+\frac{\pi^2}{6}$.

Příklad 6. [Exponenciální trik]

(a) $\frac{1}{2}$.
(b) e.
(c) e^{-2}.
(d) 1.
(e) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.
(f) e^3.
(g) 0.
(h) 0.
(i) e.
(j) e.
(k) 0.
(l) 1.
(m) e.
(n) 1.
(o) 1.
(p) $\frac{2}{3}$.
(q) $\frac{1}{e}$.
(r) 1.
(s) -1.

Příklad 7. [Heine]

(a) $\frac{1}{2}$.

(b) $\frac{1}{e^2}$.

(c) 2.

(d) Neexistuje.

(e) Neexistuje.

(f) Neexistuje.

(g) Neexistuje.

(h) Neexistuje.

(i) Neexistuje.

(j) $\frac{9}{2}$.

(k) $\frac{1}{2}$.

(l) 1.

(m) $\log 3$.

(n) $2 \log 10$.

Příklad 8. [Parametry]

(a) $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$, neexistuje $(\beta = 0)$.

(b) $\frac{1}{2}mn(n-m)$.

(c) 1 $(\alpha < 2)$, 0 $(\alpha \geq 2)$.

(d) 0 $(\alpha < \frac{1}{2})$, $\sqrt{2}$ $(\alpha = \frac{1}{2})$, $+\infty$ $(\alpha > \frac{1}{2})$.

(e) 0 $(k > 1)$, $\frac{1}{\pi}$ $(k = 1)$, $+\infty$ $(k < 1$ liché), neexistuje $(k < 1$ sudé).

(f) $4 \log 2$.

Příklad 9. [Zkouškové příklady]

(a) $\sqrt{e}$.

(b) $e^{\sqrt{2}}$.

(c) 5.

(d) $\frac{7}{6}$.

(e) $\frac{1}{e}$.

(f) $\sqrt[4]{e}$.

(g) 2.

(h) $e^{-\sqrt{\frac{1}{3}}}$.

(i) e^2.

(j) e.

(k) Neexistuje. Vyjde $\pm \frac{32}{\pi}\sqrt{2}\log^2 2$.

(l) $e^{\frac{1}{2\pi^2}}$.

(m) $\frac{1}{e^2}$.

(n) $\log 18$.

(o) e.

(p) 2.

(q) $e^{-\sqrt[4]{2}}$.

(r) $-\frac{1}{6}$.

(s) $\frac{1}{e^3}$.

(t) e.

(u) 0.