

Bonusové cvičení

Příklad. (Parciální derivace) Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt[3]{\log(y^3 + x)}.$$

Dále spočítejte její parciální derivace všude, kde existují.

Pozn. Jediný "problémový bod", kde existuje derivace podle y je $[1, 0]$ a vyjde rovna 1.

Příklad. (Implicitní funkce) Ukažte, že rovnice

$$y^3 - xyz + 1 = z^2 + 2 \log x$$

určuje na okolí bodu $[1, -1, 0]$ implicitně zadanou funkci $y = \varphi(x, z)$ splňující $\varphi(1, 0) = -1$. Spočítejte $\varphi_x(1, 0)$, $\varphi_z(1, 0)$, $\varphi_{xx}(1, 0)$.

Pozn. $\varphi_x(1, 0) = \frac{2}{3}$, $\varphi_z(1, 0) = -\frac{1}{3}$ a $\varphi_{xx}(1, 0) = \frac{2}{9}$.

Příklad. (Extrémy) Vyšetřete extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 + y \text{ na } M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq \frac{5}{6}, x + 2y = z \right\}.$$

Pozn. Maximum $\frac{7}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}$ v $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right]$ a minimum $-\frac{7}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}$ v $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}} \right]$.

Pozn. Jak by vyšly extrémy funkce $g(x, y, z) = \frac{1}{10+x^3+y}$?

Pozn. Jak by vyšly extrémy f vzhledem k $N = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < \frac{5}{6}, x + 2y = z \right\}$?