III. Derivace a implicitní funkce

Shrnutí teorie.

Definice. (Parciální derivace) Buď $k \in \{1, \ldots, n\}$ a nechť je funkce f definovaná na nějaké úsečce se středem $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\boldsymbol{e}^k$. Parciální derivací f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle k-té proměnné rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) = f_{x_k}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^k) - f(\boldsymbol{a})}{t} \; .$$

Je-li f definovaná na nějaké neprázdné a otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ a má na G všechny své parciální derivace spojité, pak říkáme, že $f \in C^1(G)$ (je třídy C^1 na G). Obdobně i $f \in C^k(G)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Poznámka. *Je-li* $f \in C^2(G)$, *pak* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a})$.

Poznámka. *Je-li* $f(x, y) = f(y, x)$, *pak* $\frac{\partial f}{\partial y}(y, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, *pokud alespoň jedna z nich existuje.*

Poznámka. *Buď* f *v bodě* $\boldsymbol{a}$ *"spojitá podél k-tého směru", tj. funkce* $t \mapsto f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^k)$ *je spojitá v nule, a nechť platí, že*

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^k) = A \;\; a \;\; \lim_{t \to 0_-} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^k) = B.$$

Je-li $A \neq B$ *či* $A = B = \pm\infty$, *tak* $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a})$ *neexistuje. Je-li* $A = B \in \mathbb{R}$, *tak* $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) = A$.

Definice. Buď $\emptyset \neq G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $f \in C^1(G)$. Uvažujme $\boldsymbol{a} \in G$, pak graf funkce

$$T(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a})(x_k - a_k), \;\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

nazýváme *tečnou nadrovinou* ke grafu funkce f v bodě $[\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})]$.

Tvrzení. (O implicitní funkci) Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ a bod $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$. Uvažujme funkci $F : G \to \mathbb{R}$ splňující pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$:

(i) $C^k(G), k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$,

(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) = 0$ a

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) \neq 0$.

Potom existuje okolí U bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ (v $\mathbb{R}^n$) a okolí V bodu $\tilde{y}$ (v $\mathbb{R}$) taková, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje jediné $y \in V$ splňující $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$. Máme tedy $y = \varphi(\boldsymbol{x})$ pro funkci $\varphi : U \to V$ splňující $\varphi \in C^k(U)$.

Tvrzení. (O dvou implicitních funkcích) Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ a bod $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] \in G$. Uvažujme dvě funkce $F_1, F_2 : G \to \mathbb{R}$ splňující pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$:

(i) $F_1, F_2 \in C^k(G)$,

(ii) $F_1(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = 0$, $F_2(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = 0$ a

(iii) $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) - \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \neq 0$.

Potom existuje okolí U bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ (v $\mathbb{R}^n$) a okolí V bodu $\tilde{\boldsymbol{y}}$ (v $\mathbb{R}^2$) taková, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje jediné $\boldsymbol{y} \in V$ splňující $F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 = F_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Máme tedy $[y_1, y_2] = [\varphi(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{x})]$ pro funkce $\varphi, \psi \in C^k(U)$.

Tvrzení. (Řetízkové pravidlo - konkrétně) Mějme otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^2$, $H \subset \mathbb{R}^3$ a funkce $\varphi, \psi, \chi \in C^1(G)$ a $f \in C^1(H)$. Uvažujme složenou funkci $F(s, t) = f(\varphi(s, t), \psi(s, t), \chi(s, t))$. Buď $\boldsymbol{a} \in G$ a označme $\boldsymbol{b} = [\varphi(\boldsymbol{a}), \psi(\boldsymbol{a}), \chi(\boldsymbol{a})]$, potom platí

$$\frac{\partial F}{\partial s}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{b}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{b}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{b}) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s}(\boldsymbol{a}) \, ,$$
$$\frac{\partial F}{\partial t}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{b}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{b}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{b}) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t}(\boldsymbol{a}) \, .$$

Příklad 1. (Parciální derivace) Spočtěte parciální derivace funkce f všude, kde existují.

(a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.

(b) $f(x,y) = \sqrt[3]{x+y^2}$.

(c) $f(x,y) = |x|\cdot|y|$.

(d) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

(e) $f(x,y) = |y-x^3|$.

(f) $f(x,y) = \sqrt{y^6-x^3}$.

(g) $f(x,y) = \max\{y-\cos x, 0\}$.

(h) $f(x,y) = \max\{y+x, x^3\}$.

(i) $f(x,y) = |\sin y - \sin x|$.

(j) $f(x,y) = \sin|x^2+y^2-1|$.

(k) $f(x,y) = \sqrt{|x|+|y|-1}$.

(l) $f(x,y) = \sqrt[3]{\log\frac{x}{y}}$.

Příklad 2. (Řetízkové pravidlo) Spočtěte parciální derivace složené funkce F.

(a) $F(s) = f(\varphi(s),\psi(s))$, kde $f(x,y) = x\sqrt{1+y^2}$ a $\varphi(s) = e^{2s}$, $\psi(s) = e^{-s}$.

(b) $F(s) = f(\varphi(s),\psi(s),\chi(s))$, kde $f(x,y,z) = xy^2z^3$ a $\varphi(s) = \sin s$, $\psi(s) = -\cos s$, $\chi(s) = e^s$.

(c) $F(s,t) = f(\varphi(s,t),\psi(s,t),\chi(s,t))$, kde $f(x,y) = xyz$ a $\varphi(s,t) = s+t^2$, $\psi(s,t) = st$, $\chi(s,t) = s$.

(d) $F(s,t) = f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$, kde $f(x,y) = \sin x\cdot\sin y$ a $\varphi(s,t) = (s-t)^2$, $\psi(s,t) = s^2-t^2$.

Příklad 3. (Jedna implicitní funkce - 2D) Ukažte existenci dané implicitní funkce a odpovězte na otázky.

(a) $2x^4y+x^3+y^3+xy = 1, [\tilde{x},\tilde{y}] = [1,0]$; $y = \varphi(x)$, tečna k φ na okolí 1, $\varphi'(1)$, $\varphi''(1)$?

(b) $2xy+\sin(x+2y) = -4, [\tilde{x},\tilde{y}] = [2,-1]$; $x = \varphi(y)$, $\varphi'(-1)$, $\varphi''(-1)$, konvexita φ na okolí -1?

(c) $x^2e^{y^2} = ye^x, [\tilde{x},\tilde{y}] = [1,1]$; $y = \varphi(x)$, tečna k φ v 1, konvexita φ na okolí 1?

(d) $\log(x^2y+x) = 2x\sin(xy), [\tilde{x},\tilde{y}] = [1,0]$; $x = \varphi(y)$, $y = \psi(x)$, monotonie φ na okolí 0, $\psi''(1)$?

(e) $e^{x^2y} = \arctan(xy)-x, [\tilde{x},\tilde{y}] = [-1,0]$; $y = \varphi(x)$, $\varphi'(-1)$, $\varphi''(-1)$, monotonie φ na okolí -1?

(f) $x^y+y^x = 2y, [\tilde{x},\tilde{y}] = [1,1]$; $y = \varphi(x)$, monotonie a konvexita φ na okolí 1?

(g) $\log(x^2+y^2+\cos(xy))+x = 0, [\tilde{x},\tilde{y}] = [0,0]$; $x = \varphi(y)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$?

Příklad 4. (Jedna implicitní funkce - 3D) Ukažte existenci dané implicitní funkce a odpovězte na otázky.

(a) $x^2+y^2+z^2-3xyz = 0, [\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}] = [1,2,0]$; $x = \varphi(y,z)$, tečná rovina φ v $[2,0]$, $\varphi_{yy}(2,0)$?

(b) $\frac{x}{z} = \log\frac{z}{y}, [\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}] = [0,1,1]$; $z = \varphi(x,y)$, tečná rovina φ v $[0,1]$?

(c) $\sin(xy) = \cos z+y^2, [\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}] = [0,1,\pi]$; $y = \varphi(x,z)$, tečná rovina φ v $[0,\pi]$, $\varphi_{xz}(0,\pi)$?

(d) $e^{xz}+xyz = e+1, [\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}] = [1,1,1]$; $z = \varphi(x,y)$, $\varphi_x(1,1)$, $\varphi_y(1,1)$, $\varphi_{xy}(1,1)$, $\varphi_{yx}(1,1)$?

(e) $\arcsin(x+z) = 2xyz^2, [\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}] = [-1,0,1]$; $x = \varphi(y,z)$, tečná rovina φ v $[0,1]$, $\varphi_{yy}(0,1)$?

(f) $\sin(x-y)+x^2yz^2 = 1, [\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}] = [1,1,1]$; $z = \varphi(x,y)$, tečná rovina φ v $[1,1]$, $\varphi_{xy}(1,1)$, $\varphi_{yx}(1,1)$?

(g) $x^3+xyz = z^2-\cos(y-1), [\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}] = [1,1,-1]$; $x = \varphi(y,z)$, $y = \psi(x,z)$, $\varphi_{zz}(1,-1)$, $\psi_x(1,-1)$?

(h) $\sin(xyz)+1 = x^2z, [\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}] = [1,0,1]$; $y = \varphi(x,z)$, $z = \psi(x,y)$, $\varphi_{xz}(1,1)$, tečná rovina ψ v $[1,0]$?

Příklad 5. (Dvě implicitní funkce)

(a) Vztahy $\sin(x+yz)-xe^{y+z} = 0$, $\cos(xy+\pi z)+xyz = -1$ a bod $[\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}] = [0,\pi,1]$.
Najděte $x = \varphi(y)$, $z = \psi(y)$ a spočtěte $\varphi'(\pi)$, $\psi'(\pi)$.

(b) Vztahy $\sin(yv)+xyu = 2v+6$, $e^{xv}+2u = xyv+7$ a bod $[\tilde{x},\tilde{y},\tilde{u},\tilde{v}] = [1,2,3,0]$.
Najděte $y = \varphi(x,u)$, $v = \psi(x,u)$ a tečné roviny k φ, ψ v $[1,3]$.

(c) Vztahy $x = u\cos\frac{v}{u}$, $y = u\sin\frac{v}{u}$ a bod $[\tilde{x},\tilde{y},\tilde{u},\tilde{v}] = [1,0,1,0]$.
Najděte $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$ a spočtete jejich parciální derivace v $[1,0]$.

(d) Vztahy $x = e^u+u\sin v$, $y = e^u-u\cos v$ a bod $[\tilde{x},\tilde{y},\tilde{u},\tilde{v}] = [1+e,e,1,\frac{\pi}{2}]$.
Najděte $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$ a spočtete jejich parciální derivace v $[1+e,e]$.

(e) Vztahy $5xu+3yv = 4x^2yv+4u^2v$, $4xyu^3+xv^2 = 5yuv$ a bod $[\tilde{x},\tilde{y},\tilde{u},\tilde{v}] = [1,1,1,1]$.
Najděte $x = \varphi(y,v)$, $u = \psi(y,v)$ a tečné roviny k φ, ψ v $[1,1]$.

Výsledky - III. Derivace a implicitní funkce

Příklad 1. (Parciální derivace)

(a) Definičním oborem je celá rovina. $f'_x(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$; $f'_y(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$ pro $y \neq -x$. V bodě $[0,0]$ jsou obě parciální derivace rovny 1. Zbylé parciální derivace neexistují.

(b) Definičním oborem je celá rovina. $f'_x(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+y^2)^2}}$; $f'_y(x,y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x+y^2)^2}}$ pro $x \neq -y^2$. $f'_x(-y^2,y)$ neexistuje (vyjde $+\infty$), $f'_y(-y^2,y), y \neq 0$, neexistuje (vyjde $y \cdot \infty$), $f'_y(0,0)$ neexistuje (vyjde $\pm\infty$).

(c) Definičním oborem je celá rovina. $f'_x(x,y) = |y| \cdot \operatorname{sign} x$ pro $x \neq 0$ a $f'_y(x,y) = |x| \cdot \operatorname{sign} y$ pro $y \neq 0$. Dále $f'_x(0,0) = 0 = f'_y(0,0)$ a zbylé derivace neexistují.

(d) Definičním oborem je celá rovina. $f'_x(x,y) = -3x^2 \operatorname{sign}(y-x^3)$; $f'_y(x,y) = \operatorname{sign}(y-x^3)$ pro $y \neq x^3$. $f'_x(0,0) = 0$ a ostatní parciální derivace neexistují (derivace podle x vyjdou $\pm 3x^2$ a podle y vyjdou ± 1).

(e) Definičním oborem je celá rovina. $f'_x(x,y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pro $x \neq 0$ a $f'_y(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$ pro $y \neq 0$. Dále $f'_x(0,0) = 0 = f'_y(0,0)$ a zbylé derivace neexistují.

(f) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \leq y^2\}$ a f je zde spojitá. Dostaneme

$$f_x(x,y) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{y^6-x^3}}, \quad f_y(x,y) = \frac{3y^5}{\sqrt{y^6-x^3}}, x < y^2.$$

Z vynechaných bodů má smysl zkoumat pouze derivaci podle proměnné y v počátku, zbylé parciální derivace nemá smysl počítat, neboť funkce není definována na žádné úsečce příslušného směru. Vyjde $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(g) Definičním oborem je celá rovina. Dostaneme $f'_x = \sin x, y > \cos x$ a 0 pro $y < \cos x$; $f'_y = 1, y > \cos x$ a 0 pro $y < \cos x$. V bodech $[k\pi, \cos k\pi], k \in \mathbb{Z}$ je $f'_x = 0$. V ostatních bodech parciální derivace neexistují.

(h) Definičním oborem je celá rovina. Dostaneme $f'_x = 1, y > x^3 - x$ a $3x^2$ pro $y < x^3 - x$; $f'_y = 1, y > x^3 - x$ a 0 pro $y < x^3 - x$. Pro $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ existuje f'_x v bodě $[x, x^3 - x]$ a rovná se 1. Parciální derivace ve zbylých bodech neexistují.

(i) Definičním oborem je celá rovina. $f'_x(x,y) = -\operatorname{sign}(\sin y - \sin x) \cdot \cos x$; $f'_y(x,y) = \operatorname{sign}(\sin y - \sin s) \cdot \cos y$ pro $\sin x \neq \sin y$. Dále $f'_x(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi) = 0 = f'_y(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi), k, l \in \mathbb{Z}$, a ve zbývajících bodech derivace neexistují.

(j) Definičním oborem je celá rovina. Standardně obdržíme

$$f_x(x,y) = 2x \cdot \operatorname{sign}(x^2+y^2-1)\cos|x^2+y^2-1|, x^2+y^2 \neq 1,$$
$$f_y(x,y) = 2y \cdot \operatorname{sign}(x^2+y^2-1)\cos|x^2+y^2-1|, x^2+y^2 \neq 1.$$

Lze spočíst, že $f'_x(0,\pm 1) = f'_y(\pm 1, 0) = 0$. Derivace ve zbylých bodech neexistují.

(k) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \geq 1\}$ a funkce je zde spojitá. Standardně obdržíme

$$f_x(x,y) = \frac{\operatorname{sign} x}{2\sqrt{|x|+|y|-1}}, \quad f_y(x,y) = \frac{\operatorname{sign} y}{2\sqrt{|x|+|y|-1}}, |x|+|y| > 1 \wedge x \neq 0.$$

Funkce $f'_x(0,y)$, $f'_y(x,0)$ neexistují pro $|y| \geq 1$, $|x| \geq 1$. Derivace ve zbylých bodech nemá smysl zkoumat.

(l) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; \frac{x}{y} > 0\}$ a f je zde spojitá. Dostaneme

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3x} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\log^2 \frac{x}{y}}}, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{3y} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\log^2 \frac{x}{y}}}, x \neq y.$$

Parciální derivace ve vynechaných bodech neexistují (jednostranné vyjdou $\pm\infty$).

Příklad 2. (Řetízkové pravidlo)

(a) $F'(s) = \frac{2e^{2s}+1}{\sqrt{1+e^{-2s}}}$.

(b) $F'(s) = e^{3s} \cos s \cdot (\cos^2 s - 2\sin^2 s + 3 \sin x \cdot \cos s)$.

(c) $F_s(s,t) = 3s^2 t + 2st^3$ a $F_t(s,t) = s^3 + 3s^2 t^2$.

(d) $F_s(s,t) = 2(s-t)\cos(s-t)^2 \cdot \cos(s^2-t^2) - 2s \sin(s-t)^2 \cdot \sin(s^2-t^2)$ a $F_t(s,t) = -2(s-t)\cos(s-t)^2 \cdot \cos(s^2-t^2) + 2t \sin(s-t)^2 \cdot \sin(s^2-t^2)$.

Příklad 3. (Jedna implicitní funkce - 2D)

(a) $\varphi'(1) = -1$, $\varphi''(1) = 4$ a tečna má rovnici $y = 1 - x$.

(b) $\varphi'(-1) = 6$, $\varphi''(-1) = 24$ a φ je konvexní na nějakém okolí -1.

(c) Tečna má rovnici $y = 2 - x$ a φ je konkávní na jistém okolí 1 (vyjde $\varphi''(1) = -1$).

(d) Funkce φ je rostoucí na nějakém okolí 0 a $\psi''(1) = -8$.

(e) $\varphi'(-1) = -\frac{1}{2}$, $\varphi''(-1) = \frac{11}{8}$ a φ je klesající na nějakém okolí -1.

(f) Funkce φ je rostoucí a konvexní na jistém okolí 1 (vyjde $\varphi'(1) = 1$, $\varphi''(1) = 4$).

(g) $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = -2$.

Příklad 4. (Jedna implicitní funkce - 3D)

(a) Tečná rovina má tvar $T(y,z) = 4 - 2y + 3z$ a $\varphi_{yy} = -5$.

(b) Tečná rovina má tvar $T(x,y) = x + y$.

(c) Tečná rovina má tvar $T(x,z) = 1 - \frac{1}{2}x$ a $\varphi_{xz}(0,\pi) = 0$.

(d) $\varphi_x(1,1) = -1$, $\varphi_y(1,1) = -\frac{1}{1+e}$, $\varphi_{xy}(1,1) = \frac{1}{1+e} = \varphi_{yx}(1,1)$.

(e) Tečná rovina má tvar $T(y,z) = 2y - z$ a $\varphi_{yy}(0,1) = -8$.

(f) Tečná rovina má tvar $T(x,y) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x$ a $\varphi_{xy}(1,1) = \frac{1}{2} = \varphi_{yx}(1,1)$.

(g) $\varphi_{zz}(1,-1) = -\frac{17}{4}$, $\psi_x(1,-1) = 2$.

(h) $\varphi_{xz}(1,1) = -1$ a tečná rovina k ψ má tvar $T(x,y) = 3 - 2x$.

Příklad 5. (Dvě implicitní funkce)

(a) $\varphi'(\pi) = 0$, $\psi'(\pi) = -\frac{1}{\pi}$.

(b) Tečná rovina k φ má tvar $T(x,u) = 6 - 2x - \frac{2}{3}u$ a ke grafu ψ to je $T(x,u) = 2u - 6$.

(c) $\varphi_x(1,0) = 1, \varphi_y(1,0) = 0, \psi_x(1,0) = 0, \psi_y(1,0) = 1$.

(d) $\varphi_x(1+e,e) = \frac{1}{e+1}, \varphi_y(1+e,e) = 0, \psi_x(1+e,e) = -\frac{e}{e+1}, \psi_y(1+e,e) = 1$.

(e) Tečná rovina k φ má tvar $T(y,v) = 10 - \frac{5}{3}y - \frac{22}{3}v$ a ke grafu ψ to je $T(y,v) = \frac{4}{3}y + \frac{17}{3}v - 6$.