Program cvičení z Matematiky 2 LS23/24

I Funkce více proměnných a množiny

Příklad I. ($\mathcal{D}_f$ a vrstevnice)

(i) $f(x,y) = y - e^{-x}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou vertikálně posunuté klesající exponenciály.

Vlastnosti víme z přednášky. Ale obrázkem. Vnitřní body nemůžou být v hranici, tj. je prázdná. Jediné dvě množiny mají obě vlastnosti.

(ii) $f(x,y) = \frac{1}{(x-1)^2+y^2}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{[1,0]\}$. Vrstevnice jsou zmenšující se kružnice, utvoří se kužel.

Množina je otevřená, tedy se rovná vnitřku a ten má prázdný průnik s hranicí, takže zbývá jeden bod a ten je evidentně hraničním bodem. Alternativa.

Pozn. *Kdyby, $f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}$, tak $\mathcal{D}_f$ není ani otevřený, ani uzavřený; vrstevnice obtížné.*

Pozn. $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 > 0\} = \{(x-1)^2 + (y+2)^2 > 16\}$. *Vně kruhu.*

(iii) $f(x,y) = \sqrt{2x - y - 1}$. $\mathcal{D}_f = \{2x - 1 \geq y\}$. Vrstevnice jsou kvadraticky posunuté přímky.

(iv) $f(x,y) = \log(1 - x^2 - 9y^2)$. $\mathcal{D}_f = \{x^2 + 9y^2 < 1\}$. Vrstevnice jsou exponenciálně posunuté elipsy pro $c > 0$. Dostaneme zpláclý a prohnutý kužel.

(v) $f(x,y) = \arcsin(3x^2 + y)$. $\mathcal{D}_f = \{-1 - 3x^2 \leq y \leq 1 - 3x^2\}$. Vrstevnice jsou posunuté paraboly. Dostaneme navrstvené paraboly, v omezené výšce.

(vi) $f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$. $\mathcal{D}_f = \{y \geq 0 \& x^2 \geq y\}$. Vrstevnice jsou posunuté části parabol tvaru $y = (x - c^2)^2$, $x \geq c^2$. Dostaneme ohnutý list. Rezerva, neuděláno.

Příklad II. (Množiny)

(i) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; -2 \leq y^2 - x \leq 2\}$. Oblast mezi dvěma parabolami.

(Konec 1. cvičení)

(ii) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = 1\}$. Větve hyperboly otevřené do stran, je to 1D útvar, tj. rovná se hranici. Náhled z obrázku, potom písmenky.

Pozn. $-x^2 + y^2 = 1$ *je otevřená opačně (všechna x).*

Pozn. *Posun v x-ové souřadnici nebude fungovat, když je část hranice vodorovná.*

(iii) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \geq z\}$. Paraboloid s vnějškem.

Pozn. *V (i) máme průnik dvou uzavřených, tedy je uzavřená.*

(iv) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; |x| + 2|y| < 2\}$. Čtverec s diagonálami na osách. Přístup k absolutní hodnotě.

(Konec 2. cvičení)

(v) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 4x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 9\}$. Povrch elipsoidu.

(vi) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < 4, x > 0\}$. Válec říznutý rovinou. Průnik dvou otevřených množin. $H(M) = \{x^2 + y^2 = 4, x \geq 0\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 4, x = 0\}$.

(vii) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2, (x-1)^2 + y^2 + z^2 < 2\}$. Rotační paraboloid proniklý s koulí.

Jde o část paraboloidu, je tedy roven hranici (nestačí nahradit nerovnost rovností).

II Globální extrémy

Připomenutí toho, jak fungují extrémy funkce na kompaktu v 1D.

Příklad I. (Elementární příklady)

(i) $f(x,y) = x^2$ a $M =$Prasátko.
f má min. 0 v bodě $[0,0]$ a max. 36 v $[6,y]$, $2 \le y \le \frac{5}{2}$.

(ii) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; -1-x \le y \le 2+2x, x \le 0\}$.
f má min. $-\frac{1}{2}$ v bodě $[0,-1]$ a max. 1 v $[0,2]$.
Poučení: Kontrolovat, že body leží v množině.

(iii) $f(x,y) = e^{y(1+x^2)}$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \ge 0, y \ge 0, x^2 + 2y^2 < 1\}$.
f má inf. $e^{-\frac{4}{3\sqrt{3}}}$ a nenabývá ho (bylo by v bodě $\frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1]$) a max. $e^0 = 1$ v $[x,0]$, $0 \le x < 1$.
Poučení: Trik s monotonií, extrém na celé úsečce.

Pozn. *Časté monotonie:* $g(t) = \arctan t$, e^{-t}, $\frac{1}{1+t}$ *pro* $t > 0$.

(Konec 3. cvičení)

(iv) $f(x,y) = (x^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x+y \ge 0\}$.
f má min. 0 v bodě $[0,0]$ a max. $\frac{2}{e}$ v $[0,1]$.

Pozn. *Kdyby* $f = (x-1)^2 + 2y^2 + 1$, *tak má min.* 1 *v bodě* $[1,0]$ *a* $\sup_M f = +\infty$.

Pozn. *Na* $M = \mathbb{R}^2$ *jsou podezřelé ty body, kde* $\nabla f = 0$.

Příklad II. (LM)

(i) $f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \le 3\}$.
f má min. -2 v bodech $[0, \pm\sqrt{2}, -1]$ a max. 2 v bodech $[0, \pm\sqrt{2}, 1]$.

(ii) $f(x,y,z) = xy + xz$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 2y^2 + z^2 = 6, x^2 = y+z\}$.
f má min. $-3\sqrt{3}$ v bodech $[\pm\sqrt{3}, 1, 2]$ a max. $3\sqrt{3}$ v bodech $[\pm\sqrt{3}, 1, 2]$.

(Konec 4. cvičení)

(iii) $f(x,y,z) = x - y + z^2$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \le 3, 2z^2 = x^2+y^2-1\}$.
f má minimum $-\frac{3}{2}$ v bodech $\left[-1, 1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a maximum $1+\sqrt{6}$ v bodech $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm 1\right]$.

(iv) $f(x,y,z) = x - 2z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2-2y \le 0, x+y \ge 1\}$.
f má minimum v bodě $\left[-\frac{1}{3\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right]$ a maximum $\sqrt{5}$ v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$.

(Konec 5. cvičení)

Pozn. *Kdyby* $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2-2y \le 0, x+y > 1\}$, *tak* f *má infimum* $-\frac{3}{\sqrt{2}}$, *nenabývá ho a maximum* $\sqrt{5}$ *v bodě* $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$.

III Derivace a implicitní funkce

Příklad I. (Derivace)

(i) $f(x,y) = x^3 \cos \sqrt[3]{y}$.

Dostaneme $f_x(x,y) = 3x^2 \cos \sqrt[3]{y}$ pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ a $f_y(x,y) = -\frac{x^3}{3\sqrt[3]{y^2}} \sin \sqrt[3]{y}$, $y \neq 0$. Pro body $[x,0]$, $x \neq 0$ dostaneme, že jednostranné limity neexistují, takže ani daná derivace neexistuje. V bodě $[0,0]$ jsou obě limity nulové, to je tedy hodnota derivace. Provést i z definice.

(ii) $f(x,y) = e^{|x^2+y^2-1|}$. Funkce je symetrická.

Dostaneme $f_x(x,y) = 2x \cdot \operatorname{sign}(x^2+y^2-1)e^{|x^2+y^2-1|}$ a $f_y(x,y) = 2y \cdot \operatorname{sign}(x^2+y^2-1)e^{|x^2+y^2-1|}$ pro $x^2+y^2 \neq 1$. Dostaneme, že $f_x(0,\pm 1) = 0$ a $f_y(\pm 1, 0) = 0$. V ostatních bodech derivace neexistují.

(iii) $f(x,y) = \sqrt{y - \sin x}$.

Máme $\mathcal{D}_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \geq \sin x\}$. Dostaneme $f_x(x,y) = -\frac{\cos x}{2\sqrt{y-\sin x}}$ a $f_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y-\sin x}}$ pro $y > \sin x$. V bodech $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, derivace podle x neexistuje a ve zbylých bodech žádnou derivaci nemá smysl zkoumat.

(iv) $F(x,y,z) = xy^2 \log x + (2z+1)^3 y$ a $y = \psi(x,z) = \sqrt{1-2x^2-e^z}$. Derivace $\tilde{F}(x,z) = f(x,\psi(x,z),z)$?

(Konec 6. cvičení)

Příklad II. (Implicitka)

(i) $2 \arcsin xy = \sin(\pi x - y)$ a bod $A = [\tilde{x}, \tilde{y}] = [1,0]$. Monotonie a konvexita $y = \varphi(x)$ na okolí 1?

Vyjde $\varphi'(1) = -\pi$ a $\varphi''(1) = 4$.

$F_x = \pi$, $F_y = 1$, $F_{xx} = F_{yy} = 0$, $F_{xy} = F_{yx} = 2$.

Pozn. *Jde i nalézt* $x = \psi(y)$, *neboť* $F_x \neq 0$.

Pozn. *Funkce* $F = \log(x+y+z)$. *Není* $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. *Ale uvažujme třeba bod* $[1,1,1]$, *pak je* $F \in C^\infty(G)$, *kde* G *je dost malé okolí* $[1,1,1]$.

(ii) $e^{x^2+z} - e^{2xy} + 6 = x + y + z$ a bod $A = [1,2,3]$. Tečná rovina $x = \varphi(y,z)$ a $\varphi_{yz}(2,3)$, $\varphi_{zy}(2,3)$.

Vyjde $T(y,z) = 1 - (y-2) + \frac{1-e^4}{-1-2e^4}(z-3)$ a $\varphi_{yz}(2,3) = \frac{2e^4}{-1-2e^4}$.

$F_x = -1-2e^4$, $F_y = -1-2e^4$, $F_z = e^4 - 1$, $F_{xx} = -10e^4$, $F_{xz} = 2e^4$, $F_{yx} = -10e^4$, $F_{yz} = 0$.

(iii) $xy = \cos(yz - xw) + 2w$, $x^3 + x \sin z = y \sin w - y$ a bod $A = [1,-1,\pi,0]$.

Určete tečné roviny $y = \varphi(x,z)$ a $w = \psi(x,z)$.

(Konec 7. cvičení)

Vyjde $T(x,z) = -1 - \frac{5}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(z-\pi)$ a $T(x,z) = -\frac{4}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(z-\pi)$.

$F_x = -1$, $F_y = 1$, $F_z = 0$, $F_w = -2$, $G_x = 3$, $G_y = 1$, $G_z = -1$, $G_w = 1$.

Příklad. $f(x,y) = \max\{y + x, x^3\}$.

V bodech $[x, x^3 - x]$, $x \in \mathbb{R}$, neexistuje derivace podle y a podle x pouze pro $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ a rovná se 1.

(Konec 8. cvičení)

IV Primitivní funkce

Příklad I. (Kouknu a vidím) 25 min.

(i) $\int x^5 - 2 + e^{-2x} - \sin\frac{x}{5}$. Lineární substituce jsou ok.

(ii) $\int \frac{1}{x^3} + 4\sqrt[3]{x+2}$. Interval není sjednocení.

(iii) $\int \frac{1}{3+x}$. Nutná absolutní hodnota.

(iv) $\int \frac{6x^2}{2+x^3}$. WA špatně.

(v) $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$.

(vi) $\int \frac{1}{x^2+4x+9} = \int \frac{1}{(x+2)^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}$, $x \in \mathbb{R}$. Důležitý příklad.

Příklad II. (Per partes) 35 min.

(i) $\int (x^2 - x)\cos(x-1)$. Totéž s exponenciálou. DI zápis.
Vyjde $(x^2 - x - 2)\sin(x-1) + (2x-1)\cos(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int x\arctan\frac{1}{x}$. Nechceme (mocniny) logaritmů, inverzních gon. fcí.
Vyjde $\frac{1}{2}(x^2\arctan\frac{1}{x} - \arctan x) + \frac{1}{2}x$, $x > 0$ nebo $x < 0$.

(iii) $\int \log\frac{1+x}{x}$. Chytrá jednička.
Vyjde $x\log\frac{x+1}{x} + \log|x+1|$, $x < -1$ nebo $x > 0$.

(iv) $\int \cos 3x \cdot \sin 7x$. Cyklení.
Vyjde $-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{49}}[\cos 3x \cdot \cos 7x + \frac{3}{7}\sin 3x \cdot \sin 7x]$, $x \in \mathbb{R}$.

Příklad III. (Substituce) 40 min.

(i) $\int \frac{\cos x}{2-\sin x} = -\int \frac{1}{y} = -\log(2-\sin x)$ pro $x \in \mathbb{R}$. 1VOS.

(ii) $\int x\sqrt{5x^2-1} = \frac{1}{15}(5x^2-1)^{3/2}$, $x > \frac{1}{\sqrt{5}}$ nebo $x < -\frac{1}{\sqrt{5}}$. 2x1VOS (snadné).

(iii) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} + \log|\cos x|$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. 2x1VOS.

(iv) $\int \frac{1}{(4+x^2)^2}$. Integrál z $\cos^2$. 2VOS/per partes. Nebo: $\int\sqrt{4-x^2}$.

(Konec 9. cvičení)

Vyjde $\frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pozn. *(Podobné integrály)*

- *Na* $\int\sqrt{9+4x^2}$, $\int\frac{1}{\sqrt{9+4x^2}}$ *použít* $x = \frac{3}{2}\tan t$ *a na* $\int\sqrt{9-4x^2}$, $\int\frac{1}{\sqrt{(9-4x^2)^3}}$ $x = \frac{3}{2}\sin t$.
- $\int x\sqrt{9-4x^2}$, $\int\frac{x}{\sqrt{(9-4x^2)^3}}$ *a* $\int\frac{x}{(1+x^2)^2}$ *pomocí* $x^2 = t$.
- $\int\frac{1}{x\sqrt{(9-4x^2)^3}}$ *a* $\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ *pomocí* $1 + x^2 = t^2$.

Příklad IV. (Mix) 30 min.

(i) $\int \frac{x^2\arcsin x^3}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{6}\arcsin^2 x^3$, $x \in (-1,1)$.

(ii) $\int e^{\sqrt[3]{x}} = 3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2)$, $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\int \frac{1}{x^2}\arccos x = -\frac{1}{x}\arccos x - \int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{x}\arccos x + \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,0), (0,1)$. Per partes + subs. $y = \sqrt{1-x^2}$ nebo $x = \sin y$. První parciální zlomek. Pozor na minus před y.

Příklad V. (Parciální zlomky) 15+15+15+(12+8) bez dopočtu, tj. 65 min.

(i) $\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{3} \log|x-1| + \frac{2}{3} \log|x+2| + \frac{1}{x+2}$.

(ii) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = \int \left(x + 1 + \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}\right) = \int \left(x + 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}\right)$. Dělení 2x.

(iii) $\int \frac{x^2-x+2}{(x^2-x-2)(x^2+x+2)} = \int \left(\frac{-2}{3(x+1)} + \frac{1}{6(x-2)} + \frac{x+1}{2(x^2+x+2)}\right)$.

(Konec 10. cvičení)

(iv) $\int \frac{1-y}{(2y^2+1)(y^2-y+1)} = \frac{1}{3} \int \frac{2y+4}{2y^2+1} - \frac{y+1}{y^2-y+1} = \frac{1}{6} \log \frac{2y^2+1}{y^2-y+1} + \frac{4}{3\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2}y - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2y-1}{\sqrt{3}}$, $y \in \mathbb{R}$. Omylem jsem spočítal $\int \frac{1-y}{(2y^2+1)(y^2-y+2)}$.

Příklad VI. ($R(\sin, \cos)$)

(i) $I := \int \frac{\sin 2x}{3\cos^2 x + 4\sin x - 7}$. Funkce je definovaná všude, dává smysl volit $y = \sin x$, pak $\mathrm{d}y = \cos x \,\mathrm{d}x$ a $\cos^2 x = 1 - y^2$. Dostaneme $I = \int \frac{2y}{3-3y^2+4y-7} = -\int \frac{\frac{1}{3}(6y-4)+\frac{4}{3}}{3y^2-4y+4} = -\frac{1}{3} \log(3\sin^2 x - 4\sin x + 4) + \frac{\sqrt{2}}{3} \arctan \frac{3\sin x - 2}{2\sqrt{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, dle 1VOS. Substituce $y = \tan \frac{x}{2}$ by to nedala naráz na celé ose.

(ii) $I := \int \frac{1-\sin x+\cos x}{(2-\sin x)(3-\cos x)}$ na $(-\pi, \pi)$ (lze najít na $\mathbb{R}$). Jako jediná možnost je použít $y = \tan \frac{x}{2}$, pak

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+y^2} \,\mathrm{d}y, \quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}.$$

Dostaneme $I = \int \frac{1-y}{(2y^2+1)(y^2-y+1)} \overset{\text{Př.V(iv)}}{=} \frac{1}{6} \log \frac{2\tan^2 \frac{x}{2}+1}{\tan^2 \frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2}+1} + \frac{4}{3\sqrt{2}} \arctan\left(\sqrt{2} \tan \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$.

(iii) $I := \int \frac{3\cos^2 x + \cos^3 x \sin x}{1-\sin^4 x}$. Integrand je definovaný na intervalech $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Dává smysl volit $y = \tan x$, $x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, pak

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{1+y^2} \,\mathrm{d}y, \quad \sin x = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Máme $I = \int \frac{3y^2+y+3}{(1+y^2)(1+2y^2)} = \int \frac{2y+3}{2y^2+1} - \frac{y}{y^2+1} = \frac{1}{2} \log \frac{2y^2+1}{y^2+1} + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2}y$.

(iv) $I := \int \frac{\sin^2 x \tan^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}$ na max. otevřených podintervalech $(0, \pi/2)$. Použijeme opět $y = \tan x$ separátně na $(0, \pi/4)$, $(\pi/4, \pi/2)$. Dostaneme $I = \int \frac{y^4}{(1+y^2)(y-1)^2} = \int 1 + \frac{1}{2(y-1)^2} + \frac{3}{2(y-1)} + \frac{\frac{1}{2}y}{y^2+1}$.

Příklad VII. ($R(1, e^x)$ a $\frac{1}{x} R(1, \log x)$)

(i) $I := \int \frac{e^x-1}{e^x(2e^{2x}-2e^x+1)} = \int \frac{y-1}{y^2(2y^2-2y+1)} = \int -\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{2y}{2y^2-2y+1} = -x + \frac{1}{e^x} + \frac{1}{2} \log(2e^{2x} - 2e^x + 1) + \arctan(2e^x - 1)$ pro $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $I := \int \frac{3}{x} \cdot \frac{\log^2 x^3 + \log x^3 + 1}{\log^4 x^3 + 3\log^2 x^3 - 4} = \int \frac{y^2+y+1}{(y^2-1)(y^2+4)} = \frac{1}{10} \int \frac{6-2y}{y^2+4} + \frac{3}{y-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{10}\Big[3\log|\log x^3 - 1| - \log|1 + \log x^3| - \log(\log^2 x^3 + 4) + 3\arctan \frac{\log x^3}{2}\Big]$ pro $x \in (0, \frac{1}{\sqrt[3]{e}})$, $(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \sqrt[3]{e})$, $(\sqrt[3]{e}, +\infty)$.

(Konec 11. cvičení)

Pozn. *Geometrické vysvětlení transformačních vztahů pro substituce $y = \tan x$ a $y = \tan \frac{x}{2}$. To také vysvětluje finální tvar výsledku v Př.III(iv).*

Příklad VIII. ($R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ a $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$)

(i) $I = \int \frac{1}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})}$ dává smysl pro $x > 0$. Použijeme $x = y^6$ a $I = 6\int \frac{1}{y^3(y+1)} = \int \frac{6}{y} - \frac{6}{y^2} + \frac{6}{y^3} - \frac{6}{1+y}$.

(ii) $I = \int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}-x\sqrt{x+1}}$, výrazy dávají smysl pro $x > 0$. Jmenovatel je kladný až na $x = 1$. Použijeme $t = \sqrt{\frac{2x}{x+1}}$, tj. $x = \frac{-t^2}{t^2-2}$ a $\mathrm{d}x = \frac{4t}{(t^2-2)^2}\mathrm{d}t$. Dostaneme $I = \int \frac{4t(1+t)}{(t^3-2t+t^2)(t^2-2)} = \int \frac{4(1+t)}{(t^2-2)(t-1)(t+2)} = \int \frac{2/3}{t+2} - \frac{8/3}{t-1} + \frac{?}{t-\sqrt{2}} + \frac{?}{t+\sqrt{2}}$.

(iii) $I = \int \frac{1}{\sqrt{4x^2+2}-x}$ dává smysl na $\mathbb{R}$. Volíme $\sqrt{4x^2+2} = 2x + t$, tj. $x = \frac{2-t^2}{4t}$ a $\mathrm{d}x = \frac{-t^2-2}{4t^2}\mathrm{d}t$. Používáme 2VOS a $\varphi \in C^1$ a klesající na $(0, +\infty)$, zobrazuje na $\mathbb{R}$, díky Bolzanově větě. Dostaneme $I = \int \frac{-t^2-2}{t(3t^2+2)} = \int -\frac{1}{t} + \frac{2t}{3t^2+2} = -\log(\sqrt{4x^2+2} - 2x) + \frac{1}{3}\log(\sqrt{4x^2+2} - 2x)$.

(iv) $I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+5x+6}}$ dává smysl na $(-\infty, -3)$, $(-2, +\infty)$. Můžeme zvolit $\sqrt{(x+3)(x+2)} = t(x+3)$, tj. $x = \frac{2-3t^2}{t^2-1}$ a $\mathrm{d}x = \frac{2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$. Dostaneme $I = 2\int \frac{3t^2-2}{(t-1)^2(t+1)^2} = \int \frac{5/2}{t-1} - \frac{5/2}{t+1} + \frac{1/2}{(t-1)^2} + \frac{1/2}{(t+1)^2}$. Alternativně: $\sqrt{x^2+5x+6} = x + t$, tj. $x = \frac{6-t^2}{2t-5}$ a $\mathrm{d}x = \frac{-2t^2+10t-6}{(2t-5)^2}\mathrm{d}t$.

(v) $I = \int \frac{1}{2+\sqrt{-x^2+3x+4}} = \int \frac{1}{2+\sqrt{(4-x)(x+1)}}$ dává smysl na $(-1, 4)$. Volme $t = \sqrt{\frac{4-x}{x+1}}$, tj. $x = \frac{4-t^2}{t^2+1}$ a $\mathrm{d}x = \frac{-10t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t$. Dostaneme $I = \int \frac{-10t}{(t^2+1)(2t^2+5t+2)} = \int \frac{-5t}{(t^2+1)(t+2)(t+1/2)} = \int \frac{-2}{t^2+1} - \frac{4/3}{t+2} + \frac{4/3}{t+1/2}$.

(Konec 12. cvičení)

Příklad IX. (Určité integrály)

$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$ a geometrický význam.

(i) $I = \int_0^{2\pi} |x| - x^3 + \cos 2x = 2\pi^2 - 4\pi^4$.

(ii) $I = \int_1^{27} e^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = [3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2)]_1^{27} = 15e^3 - 3e$. Viz Př.IV(ii).

(iii) $I = \int_{-8\pi}^{8\pi} x^2 \arctan x + \sin^2 x = 0 + 2\int_0^{8\pi} \sin^2 x = 8\int_0^{2\pi} \sin^2 x = 8\pi$. Lichost, sudost, periodicita.

Pozn. *(Symetrie)*

(a) $\int_{-a}^a f(x) = 0$, *je-li* f *lichá a* $a \in \mathbb{R}$.

(b) $\int_{-a}^a f(x) = 2\int_0^a f(x)$, *je-li* f *sudá a* $a \in \mathbb{R}$.

(c) $\int_a^{a+p} f(x) = \int_0^p f(x)$, *je-li* f *p-periodická a* $a,\ p \in \mathbb{R}$.

(iv) $I = \int_0^{7\pi} \frac{\sin x}{3+2\sin x-\cos x} = 3\int_0^{2\pi} + \int_0^{\pi} = 3[F(x)]_{-\pi}^{\pi} + [F(x)]_0^{\pi}$, kde $F(x) = \int \frac{\sin x}{3+2\sin x-\cos x} = \int \frac{2y}{(y^2+1)(2y^2+2y+1)} = \frac{2}{5}\int \frac{-y+2}{y^2+1} + \frac{2y-2}{2y^2+2y+1} = \frac{4}{5}\cdot\frac{x}{2} - \frac{6}{5}\arctan(2\tan\frac{x}{2}+1) + \frac{1}{5}\log\frac{2\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}+1}{\tan^2\frac{x}{2}+1}$. Takže $I = \frac{1}{5}\log 2 - \frac{11\pi}{10}$.

(v) $I = \int_{-11\pi/6}^{13\pi/6} \frac{\sin^2 x}{2+\cos^4 x+\cos^2 x\cdot\sin^2 x} = \int_{-11\pi/6}^{13\pi/6} \frac{\sin^2 x}{2+\cos^2 x} = \int_0^{4\pi} = 2\int_0^{2\pi} = 4\int_0^{\pi} = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} = 8\int_0^{\pi/2} = 8[F(x)]_0^{\pi/2}$, kde $F(x) = \int \frac{\sin^2 x}{2+\cos^2 x} = \int \frac{y^2}{(y^2+1)(2y^2+3)} = \int \frac{-1}{y^2+1} + \frac{3}{2y^2+3} = -x + \sqrt{\frac{3}{2}}\arctan\sqrt{\frac{2}{3}}\tan x$. Takže $I = -4\pi + 4\pi\sqrt{\frac{3}{2}}$.

(vi) $I = \int_0^{1/2} \frac{e^{3x}+6e^x}{e^{3x}-e^x-12e^{-x}} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{y^3+6y}{(y^2+3)(y-2)(y+2)} = \frac{1}{7}\int_1^{\sqrt{e}} \frac{5}{y-2} + \frac{5}{y+2} - \frac{3y}{y^2+3} = [\frac{5}{7}\log|y^2-2| - \frac{3}{14}\log(y^2+3)]_1^{\sqrt{e}} = \frac{5}{7}\log(4-e) - \frac{3}{14}\log(3+e) - \frac{5}{7}\log 3 + \frac{3}{14}\log 4$.

(Konec 13. cvičení)