IX. Funkce více proměnných - Parciální derivace

Shrnutí teorie.

Definice. (Spojitost) Buď $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$, a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je *spojitá v bodě* $\boldsymbol{x}$ *vzhledem k množině* M, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap M : f(\boldsymbol{y}) \in B(f(\boldsymbol{x}), \varepsilon).$$

Funkce f je *spojitá na množině* M, jestliže je spojitá v každém jejím bodě vzhledem k M.

Funkce je spojitá v bodě $\boldsymbol{x}$, jestliže je spojitá v bodě $\boldsymbol{x}$ vzhledem k nějakému jeho okolí.

Pozn. *Skalární násobek spojité funkce je spojitá funkce. Součet a součin spojitých funkcí je spojitá funkce. Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.*

Definice. (Limita) Buď f definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f má v bodě $\boldsymbol{a}$ limitu $L \in \mathbb{R}^*$ (tento fakt značíme $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = L$), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\} : f(\boldsymbol{x}) \in B(L, \varepsilon).$$

Pozn. *Platí přímočaré analogie jako v případě limit funkcí jedné proměnné. Nicméně praktický výpočet by byl podstatně náročnější. Roli hraje chování funkce na všech směrech kolem daného bodu, nikoliv jen zprava a zleva.*

Definice. (Parciální derivace) Buď $k \in \{1, \ldots, n\}$ a funkce f definovaná na nějaké úsečce se středem $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\boldsymbol{e}^k$. Parciální derivací f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle k-té proměnné rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^k) - f(\boldsymbol{a})}{t} \, .$$

Je-li f definovaná na nějaké neprázdné a otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ a má na G všechny své parciální derivace spojité, pak říkáme, že $f \in C^1(G)$ (je třídy C^1 na G).

Pozn. *Buď f v bodě $\boldsymbol{a}$ "spojitá podél k-tého směru", tj. funkce $t \mapsto f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^k)$ je spojitá v nule, a nechť platí, že*

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^k) = A \;\; a \;\; \lim_{t \to 0_-} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^k) = B.$$

Je-li $A \neq B$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a})$ neexistuje.

Pozn. *Vyjde-li limita stejná, ale nevlastní, tak říkáme, že parciální derivace v daném bodě rovněž neexistuje.*

Pozn. *Je-li $f(x, y) = f(y, x)$, pak $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$, pokud alespoň jedna z nich existuje. Stačí tedy spočítat jen jednu derivaci a druhou máme ze symetrie funkce f.*

Definice. (Tečná nadrovina a gradient) Buď $\emptyset \neq G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $f \in C^1(G)$. Uvažujme $\boldsymbol{a} \in G$, pak graf funkce

$$T(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a})(x_k - a_k), \;\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

nazýváme *tečnou nadrovinou* ke grafu funkce f v bodě $[\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})]$.

Gradientem funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ rozumíme vektor

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right].$$

Pozn. *V případě $n = 1$ jsme již viděli rovnici tečny ke grafu funkce v daném bodě. Gradient by se redukoval do obyčejné derivace (dle jediné proměnné).*

Obecně gradient v daném bodě zachycuje ve kterém směru a jak moc se daná veličina mění. Např. f může reprezentovat teplotu či nadmořskou výšku závisející na souřadnicích v prostoru.

Tečná nadrovina se dá reprezentovat pomocí sk. s.: $T(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$.

Příklad 1. Určete a nakreslete definiční obor a vrstevnice dané funkce, nakonec určete, kde je spojitá.

(a) $f(x,y) = 2x + 3y + 1$.
(b) $f(x,y) = \min(x,y)$.
(c) $f(x,y) = x + \sqrt{y}$.
(d) $f(x,y) = \frac{y}{x}$.
(e) $f(x,y) = x^2 + y^2$.
(f) $f(x,y) = x^2 - y^2$.
(g) $f(x,y) = \sqrt{xy}$.
(h) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
(i) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.
(j) $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.
(k) $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$.
(l) $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.
(m) $f(x,y) = \operatorname{sign}\,(\sin x \cdot \sin y)$.
(n) $f(x,y) = |x| + y$.

Pozn. *Vrstevnicí $f(x,y)$ ve výšce $c \in \mathbb{R}$ rozumíme množinu $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2; f(x,y) = c\}$.*

Příklad 2. Spočtěte parciální derivace funkce všude, kde existují.

(a) $f(x,y) = 35x - 4y^5 + 3x^2y$.
(b) $f(x,y) = \frac{\sin y^2}{x}$.
(c) $f(x,y) = e^{xy} + \sin(x+y)$.
(d) $f(x,y) = xy \tan \frac{x}{y}$.
(e) $f(x,y,z) = xyz + x\log z + yz^2$.
(f) $f(x,y) = x^y$.
(g) $f(x,y) = \frac{1}{2}\log\frac{x+y}{x-y}$.
(h) $f(x,y) = \operatorname{arccotg}\frac{x+y}{x-y}$.
(i) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
(j) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.
(k) $f(x,y) = |x| \cdot y$.
(l) $f(x,y) = |x| \cdot |y|$.
(m) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.
(n) $f(x,y) = |y - \sin x|$.
(o) $f(x,y) = |\sin y - \sin x|$.
(p) $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.
(q) $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$.
(r) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2+y} \cdot \log(x^2+y^2) & ,[x,y] \neq [0,0] \\ 0 & ,[x,y] = [0,0] \end{cases}$.
(s) $f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2+xy+y^2}\right) & ,[x,y] \neq [0,0] \\ 0 & ,[x,y] = [0,0] \end{cases}$.

Příklad 3. Načrtněte definiční obor a spočtěte parciální derivace funkce všude, kde existují. Navíc najděte rovnici tečné roviny v předepsaném bodě $\boldsymbol{a}$.

(a) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, $\boldsymbol{a} = [1,-2]$.
(b) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - \arcsin x}$, $\boldsymbol{a} = [0,1]$.
(c) $f(x,y) = \log(e^3 - e^{|x|+2|y|})$, $\boldsymbol{a} = [1, \frac{1}{2}]$.
(d) $f(x,y) = \arccos(x - \cos y)$, $\boldsymbol{a} = [1,0]$.
(e) $f(x,y) = \log\frac{1-\sqrt[3]{x}}{|y|+\sqrt[3]{x}}$, $\boldsymbol{a} = [-1,3]$.
(f) $f(x,y) = \arcsin\frac{x+y}{x^2+x+1}$, $\boldsymbol{a} = [1,-1]$.
(g) $f(x,y) = \sqrt{\frac{y-\sin x}{y}}$, $\boldsymbol{a} = [0,5]$.
(h) $f(x,y) = \sqrt{y^6 - x^3}$, $\boldsymbol{a} = [0,2]$.

Výsledky - IX. Funkce více proměnných - Parciální derivace

Příklad 1.

(a) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou rovnoběžné přímky. Funkce je spojitá na D_f.

(b) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou ramena úhlů, která jsou rovnoběžná s osami x a y. Funkce je spojitá na D_f.

(c) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$. Vrstevnice jsou poloviny parabol, posouvající se po ose x. Funkce je spojitá na D_f.

(d) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$. Vrstevnice jsou přímky procházející počátkem. Funkce je spojitá na D_f.

(e) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou kružnice se středem v počátku. Funkce je spojitá na D_f.

(f) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou hyperboly, tj. $y = \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R}$.

(g) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)\}$. Vrstevnice jsou hyperboly tvaru $y = \frac{c}{x}, c > 0$ a obě osy. Funkce je spojitá na D_f.

(h) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Vrstevnice jsou kružnice se středem v počátku a poloměrem nejvýše 1. Funkce je spojitá na D_f.

(i) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 1\}$. Vrstevnice jsou kružnice se středem v počátku a poloměrem větším než 1. Funkce je spojitá na D_f.

(j) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Vrstevnice jsou dvojice kružnic, v jednom případě kružnice. Funkce je spojitá na D_f.

(k) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\}$. Vrstevnice jsou dvojice parabol, v jednom případě parabola. Funkce je spojitá na D_f.

(l) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 2k\pi x^2 + y^2 \leq (2k + 1)\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}_0\}$. Vrstevnice jsou posloupnosti kružnic. Funkce je spojitá na D_f.

(m) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou tři: Pro $c = 0$ jde o přímky $x = k\pi$ a $y = pi, k \in \mathbb{Z}$. Pro $c = -1$ jde o množinu $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in (-\pi + 2k\pi, 2k\pi), y \in (2l\pi, \pi + 2l\pi), k, l \in \mathbb{Z}\} \cup \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi), y \in (-\pi + 2l\pi, 2l\pi), k, l \in \mathbb{Z}\}$. Pro $c = 1$ jde o zbytek $\mathbb{R}^2$. Pro ostatní c žádné vrstevnice nejsou. Funkce je spojitá na každé množině odpovídající vrstevnici pro $c = \pm 1$, jinde není.

(n) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou grafy funkcí $y = c - |x|, c \in \mathbb{R}$. Funkce je spojitá na D_f.

Příklad 2.

(a) $f'_x(x, y) = 6xy + 35; f'_y(x, y) = -20y^4 + 3x^2$ pro $[x, y] \in \mathbb{R}^2$.

(b) $f'_x(x, y) = -\frac{\sin y^2}{x^2}; f'_y(x, y) = \frac{2y \cos y^2}{x}$ pro $[x, y] \in \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$.

(c) $f'_x(x, y) = ye^{xy} + \cos(x + y); f'_y(x, y) = xe^{xy} + \cos(x + y)$ pro $[x, y] \in \mathbb{R}^2$.

(d) $f'_x(x, y) = y \tan \frac{x}{y} + xy \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}; f'_y(x, y) = x \tan \frac{x}{y} + xy \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{-x}{y^2}$ pro $[x, y] \in \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(e) $f'_x(x, y, z) = yz + \log z; f'_y(x, y, z) = xz + z^2; f'_z(x, y, z) = xy + \frac{x}{z} + 2yz$ pro $[x, y] \in \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; z > 0\}$.

(f) $f'_x(x, y) = yx^{y-1}; f'_y(x, y) = x^y \log x$ pro $[x, y] \in \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$.

(g) $f'_x(x, y) = -\frac{y}{x^2 - y^2}\ ; f'_y(x, y) = \frac{x}{x^2 - y^2}$ pro $[x, y] \in \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -x < y < x \vee x < y < -x\}$.

(h) $f'_x(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}\ ; f'_y(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$ pro $[x, y] \in \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \neq y\}$.

(i) $f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ; f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pro $[x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus [0, 0]$. V bodě $[0, 0]$ neexistují obě parciální derivace.

(j) $f'_x(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}\ ; f'_y(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}$ pro $[x, y] \in \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \neq -x\}$. V bodě $[0, 0]$ jsou obě parciální derivace rovny 1. Zbylé parciální derivace neexistují.

(k) $f'_x(x, y) = y \cdot \operatorname{sign} x$ pro $[x, y] \in \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$ a $f'_y(x, y) = |x|$ pro $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Dále $f'_x(0, 0) = 0$ a $f'_x(0, y), y \neq 0$, neexistuje.

(l) $f'_x(x, y) = |y| \cdot \operatorname{sign} x$ pro $[x, y] \in \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$ a $f'_y(x, y) = |x| \cdot \operatorname{sign} y$ pro $[x, y] \in \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$. Dále $f'_x(0, 0) = 0 = f'_y(0, 0)$ a zbylé derivace neexistují.

(m) $f'_x(x,y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$ a $f'_y(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$. Dále $f'_x(0,0) = 0 = f'_y(0,0)$ a zbylé derivace neexistují.

(n) $f'_x(x,y) = -\text{sign }(y - \sin x) \cdot \cos x; f'_y(x,y) = \text{sign }(y - \sin x)$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \neq \sin x\}$. Derivace podle y ve vynechaných bodech neexistuje. Dále $f'_x(\frac{\pi}{2} + k\pi, (-1)^k) = 0, k \in \mathbb{Z}$ a ve zbylých bodech derivace neexistuje.

(o) $f'_x(x,y) = -\text{sign }(\sin y - \sin x) \cdot \cos x; f'_y(x,y) = \text{sign }(\sin y - \sin s) \cdot \cos y$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; \sin x \neq \sin y\}$. Dále $f'_x(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi) = 0 = f'_y(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi), k, l \in \mathbb{Z}$ a ve zbývajících bodech derivace neexistují.

(p) $f'_x(x,y,z) = \frac{z}{y}(\frac{x}{y})^{z-1}$; $f'_y(x,y,z) = -\frac{xz}{y^2}(\frac{x}{y})^{z-1}$; $f'_z(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \log\frac{x}{y}$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; xy > 0\}$.

(q) $f'_x(x,y,z) = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}-1}; f'_y(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}} \cdot \frac{\log x}{z}$; $f'_z(x,y,z) = -x^{\frac{y}{z}} \cdot \frac{y \log x}{z^2}$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, z \neq 0\}$.

(r) $f'_x(x,y) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}} \log(x^2+y^2) + 2x\frac{\sqrt[3]{x^2+y}}{x^2+y^2}; f'_y(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}} \log(x^2+y^2) + 2y\frac{\sqrt[3]{x^2+y}}{x^2+y^2}$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \neq -x^2\}$. V $(x, -x^2)$ neexistují parciální derivace pokud $x^2 + x^4 \neq 1$, pokud $x^2 + x^4 = 1$, jsou obě parciální derivace nulové.

(s) $f'_x(x,y) = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2}$, $f'_y(x,y) = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)^2}$ pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus [0,0]$; v bodě $[0,0]$ jsou obě parciální derivace nulové.

Příklad 3. (a) $D_f = \mathbb{R}^2$ a funkce je na něm spojitá. Pro $x, y \neq 0$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x \cdot \text{sign}(xy)}{2\sqrt{|xy|}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y \cdot \text{sign}(xy)}{2\sqrt{|xy|}} \ .$$

Dále $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Potom $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neexistuje pro $x \neq 0$. Analogicky $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neexistuje pro $y \neq 0$. Parciální derivace jsou spojité na nějakém okolí bodu $[1,-2]$, tečná rovina má tedy smysl a má rovnici $T(x,y) = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y+2)$.

(b) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \in [-1,0] \vee (x \in (0,1] \wedge y \in (-\infty, -\sqrt{\arcsin x}) \cup (\sqrt{\arcsin x}, +\infty))\}$, funkce je na něm spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-1}{2\sqrt{y^2 - \arcsin x}\sqrt{1-x^2}} \ , \ x \in (-1,1), y^2 > \arcsin x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{y^2 - \arcsin x}} \ , \ x \in [-1,1], y^2 > \arcsin x.$$

Parciální derivaci podle x nemá smysl počítat ve vynechaných bodech (definiční obor neobsahuje vodorovnou úsečku kolem nich), podobně parciální derivaci podle y nemá smysl počítat ve vynechaných bodech až na počátek. Zde dostaneme, že $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje. Obě derivace jsou spojité alespoň na nějakém okolí bodu $[0,1]$. Pro tečnou rovinu dostaneme $T(x,y) = y - \frac{x}{2}$.

(c) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; |x| + 2|y| < 3\}$ a funkce je zde spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot \text{sign } x}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} \ , \ [x,y] \in D_f, x \neq 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot 2 \text{ sign } y}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} \ , \ [x,y] \in D_f, y \neq 0.$$

Dále derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \in (\frac{-3}{2}, \frac{3}{2})$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \in (-3,3)$ neexistují. Alespoň na nějakém okolí bodu $[1, \frac{1}{2}]$ jsou parciální derivace spojité. Pro tečnou rovinu dostaneme $T(x,y) = \log(e^3 - e^2) - \frac{1}{e-1}(x-1) - \frac{1}{e-1}(y - \frac{1}{2})$.

(d) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; -1+\cos y \leq x \leq 1+\cos y\}$ a f je zde spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-1}{\sqrt{1-(x-\cos y)^2}} \;, -1+\cos y < x < 1+\cos y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-\sin y}{\sqrt{1-(x-\cos y)^2}} \;, -1+\cos y < x < 1+\cos y.$$

Parciální derivaci dle x nemá ve vynechaných bodech smysl počítat, neboť definiční obor neobsahuje vodorovnou úsečku kolem těchto bodů. Podobně nemá smysl počítat derivaci dle y (svislé úsečky) s výjimkou bodů $[0,k\pi], k \in \mathbb{Z}$. Zjistíme, že $\frac{\partial f}{\partial y}(0,k\pi)$ neexistuje. Alespoň na nějakém okolí bodu $[1,0]$ jsou parciální derivace spojité, pro tečnou rovinu dostaneme $T(x,y) = \frac{\pi}{2} - (x-1)$.

(e) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \in (0,1) \vee (0 \geq x \wedge y \in (-\infty, \sqrt[3]{x}) \cup (\sqrt[3]{x}, +\infty))\}$ a f je zde spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-|y|-1}{3\sqrt[3]{x^2}(1-\sqrt[3]{x})(|y|+\sqrt[3]{x}))}, [x,y] \in D_f, x \neq 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-\text{sign } y}{|y|+\sqrt[3]{y}}, [x,y] \in D_f, y \neq 0.$$

Derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \in (0,1)$ neexistují. Alespoň na nějakém okolí bodu $[-1,3]$ jsou parciální derivace spojité, pro tečnou rovinu dostaneme $T(x,y) = -\frac{1}{3}(x+1) - \frac{1}{2}(y-3)$.

(f) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; -(x+1)^2 \leq y \leq x^2+1\}$ a f je zde spojitá. Pro body $[x,y]$ splňující $-(x+1)^2 < y < x^2+1$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{x^2+x+1}\right)^2}} \cdot \frac{-x^2+1-2xy-y}{(x^2+x+1)^2} \;,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{x^2+x+1}\right)^2}} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} \;.$$

Derivaci podle y nemá ve vynechaných bodech smysl počítat, neboť definiční obor neobsahuje svislou úsečku kolem těchto bodů. Derivaci podle x má smysl počítat pouze v bodech $[0,1], [-1,0]$ (v ostatních chybí vodorovná úsečka). Derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0)$ neexistují. Díky spojitosti derivací na okolí bodu $[1,-1]$ můžeme najít tečnou rovinu a ta má tvar $T(x,y) = \frac{1}{3}(x+y)$.

(g) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; (y > 0 \wedge y \geq \sin x) \vee (y < 0 \wedge y \leq \sin x)\}$ a funkce je zde spojitá. Pro body $[x,y]$ splňující, že $y > 0$ a $y > \sin x$ či $y < 0$ a $y < \sin x$, dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\cos x}{2y}\sqrt{\frac{y}{y-\sin x}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\sin x}{y^2}\sqrt{\frac{y}{y-\sin x}} \;.$$

Derivaci podle proměnné x má smysl počítat pouze v bodech $[\frac{\pi}{2}+2k\pi, 1]$ a $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, -1]$ pro $k \in \mathbb{Z}$. V ostatních bodech nemá smysl počítat derivaci ani podle x, ani podle y, protože definiční obor neobsahuje úsečky kolem těchto bodů. Dostaneme, že $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2}+2k\pi, 1)$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, -1)$ neexistují. Díky spojitosti parciálních derivací na okolí bodu $[0,5]$ má smysl zkoumat tečnou rovinu, její předpis je $T(x,y) = 1 - \frac{1}{10}x$.

(h) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \leq y^2\}$ a f je zde spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{y^6-x^3}} \;, x < y^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^5}{\sqrt{y^6-x^3}} \;, x < y^2.$$

Z vynechaných bodů má smysl zkoumat pouze derivaci podle proměnné y v počátku, zbylé parciální derivace nemá smysl počítat, neboť funkce není definována na žádné úsečce příslušného směru. Vyjde $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Díky spojitosti parciálních derivací na okolí bodu $[0,2]$ má smysl zkoumat tečnou rovinu, vyjde $T(x,y) = 8 + 12(y-2)$.