VIII. Uzavřené a otevřené množiny

Shrnutí teorie.

Definice. (Základní pojmy) Buď $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je *vnitřním bodem* množiny M, jestliže existuje $r > 0$ takové, že $B(\boldsymbol{x}, r) \subset M$. Množina M se nazve *otevřená* (v $\mathbb{R}^n$), jestliže je každý její bod zároveň vnitřním bodem. *Vnitřkem* množiny M rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny M, značíme ji Int M (interior).

Řekneme, že $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je *hraničním bodem* množiny M, jestliže pro každé $r > 0$ platí

$$B(\boldsymbol{x}, r) \cap M \neq \emptyset \quad \text{a} \quad B(\boldsymbol{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset.$$

(Body, které jsou uvnitř množiny M splňují první podmínku automaticky a druhou podmínku ihned splňují body mimo množinu M.) *Hranicí* množiny M rozumíme množinu jejich hraničních bodů, značíme ji $H(M)$. *Uzávěrem* množiny M rozumíme množinu $M \cup H(M)$, značíme ji $\overline{M}$. Nakonec říkáme, že množina M je *uzavřená* (v $\mathbb{R}^n$), jestliže $H(M) \subset M$.

Prototypy v $\mathbb{R}^1$: Množina $[0, 1]$ je uzavřená, $(0, 1)$ je otevřená a $[0, 1)$ není ani jedno.

Tvrzení. (Charakterizace uzavřených množin) Buď $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak je ekvivalentní

(a) Množina M je uzavřená.

(b) Množina $\mathbb{R}^n \setminus M$ je otevřená.

(c) Pokud posloupnost $\{\boldsymbol{x}_n\}_n \subset M$ konverguje k $\boldsymbol{x}$, pak $\boldsymbol{x} \in M$.

Tvrzení. (Vlastnosti uzavřených množin)

(a) Prázná množina a $\mathbb{R}^n$ jsou uzavřené množiny.

(b) Průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

(c) Sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.

Tvrzení. (Vlastnosti otevřených množin)

(a) Prázná množina a $\mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny.

(b) Sjednocení libovolně mnoha otevřených množin je otevřená množina.

(c) Průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.

Poznamenejme, že prázdná množina a celý prostor jsou jediné dvě množiny v $\mathbb{R}^n$, které jsou otevřené a uzavřené zároveň.

Tvrzení. (Triviální pozorování) Buď $M \subset \mathbb{R}^n$. Potom platí:

(a) Int $M \subset M$.

(b) Množina $\overline{M}$ je uzavřená.

(c) Množina Int M je otevřená.

(d) Množina M je uzavřená právě tehdy, když $M = \overline{M}$.

(e) Množina M je otevřená právě tehdy, když $M =$ Int M.

Je-li navíc $M \subset N \subset \mathbb{R}^n$, pak ještě platí:

(f) Int $M \subset$ Int N.

(g) $\overline{M} \subset \overline{N}$.

Tvrzení. (Otevřenost/uzavřenost úrovňových množin) Buď f spojitá funkce na $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

(a) Množiny $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; f(\boldsymbol{x}) < c\}$ a $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; f(\boldsymbol{x}) > c\}$ jsou otevřené.

(b) Množiny $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; f(\boldsymbol{x}) \leq c\}$ a $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; f(\boldsymbol{x}) \geq c\}$ jsou uzavřené.

(c) Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; f(\boldsymbol{x}) = c\}$ je uzavřená.

Příklad 1. [Elementární] Rozhodněte zda jsou zadané množiny otevřené či uzavřené. Najděte jejich vnitřek, uzávěr a hranici.

(a) $M = \{\boldsymbol{x}\}$, kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ daný.

(b) $M \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná a konečná.

(c) $M = (0, 1) \subset \mathbb{R}$.

(d) $M = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

(e) $M = [0, 1) \subset \mathbb{R}$.

(f) $M = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

(g) $M = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

(h) $M = (-\infty, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

(i) $M = \mathbb{N}$.

(j) $M = \mathbb{Q}$.

(k) $M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(l) $M = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

(m) $M = \{[\frac{1}{n}, 0]; n \in \mathbb{N}\}$.

(n) $M = \{[\frac{1}{n}, 0]; n \in \mathbb{N}\} \cup \{[0, 0]\}$.

Příklad 2. [Úrovňové množiny] Rozhodněte zda jsou zadané množiny otevřené či uzavřené. Najděte jejich vnitřek, uzávěr a hranici.

(a) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y \leq 0\}$.

(b) $M =$ jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$.

(c) $M =$ jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$ bez bodu $[1, 0]$.

(d) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\}$.

(e) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 9\}$.

(f) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + e^y > 17\}$.

(g) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$.

(h) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x - y| = x - y\}$.

(i) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x + y| > x + y\}$.

(j) $M = \{[x, y, y] \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y > 0, x + y = 2, z \leq 0\}$.

Příklad 3. Rozhodněte zda jsou zadané množiny otevřené či uzavřené. Najděte jejich vnitřek, hranici a uzávěr. Množiny načrtněte.

(a) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

(b) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x < y < x + 3\}$.

(c) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$.

(d) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| > 1\}$.

(e) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 1\}$.

(f) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + z^2 \leq 1\}$.

(g) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z\}$.

(h) $M = \{[t, t, -t] \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 4.

(a) Najděte $A, B \subset \mathbb{R}$, aby $\mathrm{Int}\,(A \cup B) \neq \mathrm{Int}\,A \cup \mathrm{Int}\,B$.

(b) Najděte $A, B \subset \mathbb{R}$, aby $H(A \cup B) \neq H(A) \cup H(B)$.

(c) Najděte $A, B \subset \mathbb{R}$, aby $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

(d) Buď $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(e) Buď $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(f) Buď $A \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Int}\,(\mathbb{R}^n \setminus A) = \overline{A}$ (a tedy také $\mathbb{R}^n \setminus \overline{A} = \mathrm{Int}\,(\mathbb{R}^n \setminus A)$).

(g) Buď $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\mathrm{Int}\,(A \cap B) = \mathrm{Int}\,A \cap \mathrm{Int}\,B$.

(h) Buď $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\mathrm{Int}\,(A \cup B) \supset \mathrm{Int}\,A \cup \mathrm{Int}\,B$.

(i) Najděte funkci f, aby pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ byla množina $\{x \in \mathbb{R}; f(x) = c\}$ otevřená.

(j) Najděte spojitou funkci f, aby pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ byla množina $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > c\}$ prázdná a zároveň $\{x \in \mathbb{R}; f(x) = c\}$ neprázdná. K určení hraničních bodů tedy nepostačuje pouze zkoumat rovnost namísto nerovnosti.

(k) Najděte spojitou funkci f na $[1, +\infty)$, aby byla množina $\{f(x); x \geq 1\}$ jednobodová. Spojitý obraz neomezené množiny tedy může být omezená (a uzavřená) množina.

Výsledky - VIII. Uzavřené a otevřené množiny

Příklad 1. [Elementární]

(a) M je uzavřená a není otevřená. Vnitřek je prázdný a $H(M) = M$.
(b) M je uzavřená a není otevřená. Vnitřek je prázdný a $H(M) = M$.
(c) M je otevřená a není uzavřená. Hranice je $\{0, 1\}$, $\overline{M} = [0, 1]$.
(d) M je uzavřená a není otevřená. Hranice je $\{0, 1\}$, Int $M = (0, 1)$.
(e) M není ani otevřená, ani uzavřená. A $\overline{M} = [0, 1], \text{Int } M = (0, 1)$.
(f) M je otevřená a není uzavřená, $\overline{M} = [0, +\infty)$.
(g) M je uzavřená a není otevřená, Int $M = (0, +\infty), H(M) = \{0\}$.
(h) M je otevřená, i uzavřená, hranice je prázdná.
(i) M je uzavřená a není otevřená, $H(M) = M$, Int $M = \emptyset$.
(j) M není ani uzavřená, ani otevřená. Vnitřek je prázdný a uzávěr je celý prostor.
(k) M není ani uzavřená, ani otevřená. Vnitřek je prázdný a uzávěr je celý prostor.
(l) M není ani uzavřená, ani otevřená, $H(M) = M \cup \{0\} = \overline{M}$ a Int $M = \emptyset$.
(m) M není ani uzavřená, ani otevřená, $H(M) = M \cup \{[0, 0]\} = \overline{M}$ a Int $M = \emptyset$.
(n) M je uzavřená a není otevřená, $H(M) = M = \overline{M}$ a Int $M = \emptyset$.

Příklad 2. [Úrovňové množiny]

(a) Není ani otevřená, Int $M = \{x > 0, y < 0\}, H(M) = \{x = 0 \text{ nebo } y = 0\}$.
(b) M je uzavřená a není otevřená, Int $M = \emptyset, H(M) = M$.
(c) M není uzavřená ani otevřená, Int $M = \emptyset, H(M) = M \cup \{[1, 0]\}$.
(d) M je otevřená, Int $M = M, H(M) = \{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$.
(e) M je uzavřená, Int $M = \{x^2 + y^2 > 9\}, H(M) = \{x^2 + y^2 = 9\}$.
(f) M je otevřená, Int $M = M, H(M) = \{x^2 + e^y = 17\}$.
(g) M je uzavřená, Int $M = \emptyset, H(M) = M$.
(h) M je uzavřená, Int $M = \{x > y\}, H(M) = \{x = y\}$.
(i) M je otevřená, Int $M = \{x + y < 0\}, H(M) = \{x + y = 0\}$.
(j) M není uzavřená ani otevřená, Int $M = \emptyset, H(M) = \{x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0, y = 2 - x\}$.

Příklad 3.
(a) M je otevřená, $H(M) = \{x^2 + y^2 = 4\} \cup \{x^2 + y^2 = 1\}$. Jedná se o mezikruží.
(b) M je otevřená, $H(M) = \{x - y = 0\} \cup \{-x + y = 3\}$. Jedná se o prostor mezi dvěma přímkami.
(c) M je uzavřená, $H(M) = \{y = x^2\} \cup \{y = x^2 + 1\}, \text{Int } M = \{x^2 < y < x^2 + 1\}$. Jedná se o prostor mezi dvěma parabolami.
(d) M je otevřená, $H(M) = \{|x| = 1\}$. Jedná se o dvě oddělené poloroviny.
(e) M je uzavřená, $H(M) = M, \text{Int } M = \emptyset$. Jedná se o průnik dvou válcových ploch.
(f) M je uzavřená, $H(M) = \{x^2 + y^2 = 1 \text{ nebo } x^2 + z^2 = 1\}, \text{Int } M = \{x^2 + y^2 < 1, x^2 + z^2 < 1\}$. Jedná se o průnik dvou (nekonečných) válců.
(g) M je uzavřená, $H(M) = M, \text{Int } M = \emptyset$. Jedná se o plášť rotačního paraboloidu.
(h) M je uzavřená, $H(M) = M, \text{Int } M = \emptyset$. Jedná se o přímku.

Příklad 4.
(a) Kreslete.
(b) Kreslete.
(c) Kreslete.
(d) Uzávěr zachovává uspořádání množin a uzávěr uzavřené množiny je množina.

(e) Uzávěr zachovává uspořádání množin.

(f) Doplněk otevřené je uzavřená a naopak. Interior zachovává uspořádaní množina a interior otevřené množiny je množina.

(g) Použijte vhodně (f), De Morganovy vzorce a (d).

(h) Interior zachovává uspořádání množin. Interior množiny je největší otevřená množina obsažená v dané množině.

(i) Typická nespojitá funkce.

(j) Hodnota maxima.

(k) $\frac{x}{|x|}$.