## XIII. Konvergence řad

### Shrnutí teorie.

**Definice.** (Konvergence) Budeme zkoumat absolutní či neabsolutní konvergenci a divergenci nekonečných řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$. Číslo $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ je *k-tý částečný součet* této řady. Pokud má posloupnost částečných součtů limitu, tak říkám, že řada *konverguje* (k hodnotě této limity). V opačném případě řada *diverguje.*

Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$, je *absolutně konvergentní*, pokud konverguje řada absolutních hodnot. Pokud je řada konvergentní, ale není absolutně konvergentní, tak říkáme, že je *neabsolutně konvergentní.* Jestliže je řada absolutně konvergentní, tak je i konvergentní.

**Tvrzení** (Nutná podmínka)**.** Jestliže řada konverguje, tak nutně platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Tvrzení** (Kritéria – nezáporné členy)**.** Uvažujme řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Potom platí:

(Srovnávací) Buď $0 \le a_n \le b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

- (i) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- (ii) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, pak diverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(Limitní srovnávací) Buď $0 \le a_n, b_n$ a nechť existuje limita $L := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

- (i) Je-li $L \in (0,\infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- (ii) Je-li $L = 0$, pak konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zaručí konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- (iii) Je-li $L = \infty$, pak divergence $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zaručí divergenci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Tvrzení** (Kritéria – absolutní konvergence)**.** Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Potom platí:

(Odmocninové)
- (i) Je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje.
- (ii) Je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(Podílové)
- (i) Je-li $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje.
- (ii) Je-li $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

**Tvrzení** (Kritérium – alternující členy)**.** Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Je konvergentní jestliže

- (i) od jistého indexu je posloupnost $\{a_n\}_n$ monotónní (neroste či neklesá) a
- (ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Tvrzení** (Základní řada)**.** Pro $r > 1$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ konvergentní. Pro $r \le 1$ je divergentní.

**Příklad** (Použití kritérií)**.**

(Srovnávací) Použitelné u jednodušších řad, kde jsme schopni členy rozumně odhadnout.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+4}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-\cos^2 n}, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n}{n\sqrt{n}}$ .

(Limitní srovnávací) Srovnáváme s řadou typu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ pro vhodné $r$. Když toho "vhodné" $r$ nevidíme hned, tak počítáme s obecným a z výsledku obvykle toto číslo určíme tak, aby vyšla kladná konstanta. Typicky rozdíly odmocnin, racionální funkce (násobené omezenou).
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n-1}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \frac{1}{n}}{n^2-1}, \sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos \frac{1}{n}), \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

(Odmocninové) Typicky mocninné funkce, třeba v kombinaci s polynomy. Nebo $n$-té mocniny.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+100}{3n-1}\right)^n, \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{2}(e^{\frac{1}{n}}-1)\right]^{2n}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

(Podílové) Typicky faktoriály, třeba v kombinaci s mocninnou funkcí. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 3^n}$.

(Alternující) To, že je v řadě $(-1)^n$ krát něco ještě neznamená, že to je příklad na toto kritérium. Je potřeba, aby "něco" šlo monotónně k nule (alespoň od jistého indexu $n_0$). Typicky z předešlých kritérií zjistíme, že řada není absolutně konvergentní. Pak přijde na řadu zkoumání neabsolutní konvergence (když nejsou členy nezáporné).
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan n \cdot \arctan \frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n)\frac{\sqrt{n^2-1}-n}{\sqrt{n^2+n}-n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\cos\frac{2}{\sqrt{n+4}}}$ .

---

**Příklad 1.** Určete, zda následující řady (ne)absolutně konvergují či divergují.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ .

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ .

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^{4,2}+3}$ .

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{4n+3}\right)^n$ .

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5n+1}{4n+3}\right)^n$ .

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{9}\right)^n$ .

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n}$ .

(h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^5-3n^3+n+1}{n^4-2n^6+n^7-1}$ .

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{\frac{1}{n}}}{n^3}$ .

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} 2\sin\frac{n}{2}\cos\frac{n}{2}$ .

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\log(n+1)}$ .

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+3}}{\sqrt[4]{n}}$ .

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{2^n+3^n}$ .

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n)\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+4}$ .

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^3+4}$ .

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^4+3}$ .

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ .

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ .

(s) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n^2)(\sqrt{n+11}-\sqrt{n+2})$ .

(t) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{\frac{n^2}{n^2+1}}-1\right)$ .

(u) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$ .

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ .

(w) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ .

(x) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ .

(y) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n)\frac{2-\cos(\pi n)}{4n}$ .

(z) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n\sin\frac{1}{n}\right)$ .

(a$^2$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right)$ .

(b$^2$) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(e^{\frac{1}{n^2}}-1)\sin\frac{1}{2\sqrt[5]{n}}$ .

**Příklad 2.** [Parametr] Určete, zda následující řady (ne)absolutně konvergují či divergují v závislosti na parametrech $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta > 0$.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha^n)$ .

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}$ .

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log\alpha}$ .

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$ .

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha e^{\sqrt{n^2+11}-\sqrt{n^2+1}}$ .

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n^2}}{2^n}$ .

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4\alpha^n$ .

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^2}$ .

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\alpha^n}{n}$ .

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\alpha^{2n+1}}{2n+1}$ .

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-3)^n}{\sqrt{n}}(2\alpha)^n$ .

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{3n}\alpha}{(n+1)^\beta}$ .

**Příklad 3.** [Zkouškové] Vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) zadaných řad.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left[\cos(\sqrt{n^\alpha+1}-\sqrt{n^\alpha-1})\right],\ \alpha \geq 0.$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[n^\alpha\left(\sqrt[3]{n^\alpha+1}-\sqrt[3]{n^\alpha+\cos\frac{1}{n}}\right)\right],\ \alpha \in [0,6].$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n+1}\frac{n}{4^n n^2+(-5)^n n+6n^3},\ \alpha \in \mathbb{R}.$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt[3]{n^\alpha+n^2}-\sqrt[3]{n^\alpha+1}}{n^2},\ \alpha \geq 0.$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha-1)^{n^2}\frac{\sqrt{n+2}}{n+1},\ \alpha \in \mathbb{R}.$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2\arctan n+\arctan\frac{1}{n}}{\pi}\right]^{n(n+2)}.$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}{\sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}.$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\cos\left(\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)\right]^2.$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\sqrt[6]{n^2+8n}-\sqrt[6]{n^2-n}}{\sqrt[3]{n^4+3n^2}-\sqrt[3]{n^4-2n^2}}\right]^n.$

**Výsledky - XIII. Konvergence řad**

**Příklad 1.**
(a) AK.
(b) AK.
(c) AK.
(d) AK.
(e) D.
(f) AK.
(g) AK.
(h) AK.
(i) AK.
(j) D.
(k) AK.
(l) AK.
(m) AK.
(n) D.
(o) NK.
(p) AK.
(q) NK .
(r) AK.
(s) NK.
(t) AK.
(u) NK.
(v) NK.
(w) NK.
(x) D.
(y) D.
(z) NK.
($a^2$) AK.
($b^2$) AK.

**Příklad 2.**
(a) Pro $\alpha = 1$ AK, jinak D.
(b) Pro $\alpha = \pm 1$ D, jinak AK.
(c) Pro $\alpha \leq 0$ není definováno, pro $\alpha \geq \frac{1}{e}$ D a jinak AK.
(d) Pro $\alpha > \frac{1}{2}$ AK, jinak D.
(e) Pro $\alpha < -1$ AK, jinak D.
(f) Pro $|\alpha| \leq 1$ AK, jinak D.
(g) Pro $|\alpha| < 1$ AK, jinak D.
(h) Pro $|\alpha| \leq 1$ AK, jinak D.
(i) Pro $|\alpha| < 1$ AK, pro $\alpha = 1$ NK, jinak D.
(j) Pro $|\alpha| < 1$ AK, Pro $|\alpha| = 1$ NK, jinak D.
(k) Pro $|\alpha| < \frac{1}{6}$ AK, pro $\alpha = \frac{1}{6}$ AK, jinak D.
(l)
- Pro $\alpha \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ a libovolné $\beta > 0$ AK.
- Pro $\alpha \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ a libovolné $\beta > 1$ AK. Pro $\beta \in (0, 1]$ D.
- Pro $\alpha \in \{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ a libovolné $\beta > 1$ AK. Pro $\beta \in (0, 1]$ NK.

**Příklad 3.**
(a) Pro $\alpha = 0$ D, pro $\alpha \in (0, 1]$ NK a pro $\alpha > 1$ AK.
(b) Pro $\alpha \in [3, 6]$ D a pro $\alpha \in [0, 3)$ AK.
(c) Pro $|\alpha| \geq 5$ D a pro $|\alpha| < 5$ AK.
(d) Pro $\alpha \in \left[\frac{2}{3}, 6\right]$ D a pro $\alpha \in \left[0, \frac{2}{3}\right) \cup (6, +\infty)$ AK.
(e) Pro $\alpha \in (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$ D, pro $\alpha \in (0, 2)$ AK a pro $\alpha = 0$ NK.
(f) AK.
(g) AK.
(h) NK.
(i) AK.
(j) AK.