Další příklady na primitivní funkce - zadání

Příklad (Mat III - 14/15A)**.** Nalezněte následující primitivní funkci na maximálním intervalu:

$$\int \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x \cdot (\cos x + 1)} \,\mathrm{d}x \,.$$

Příklad (Mat III - 14/15B)**.** Nalezněte následující primitivní funkci na maximálním intervalu:

$$\int \frac{\cos x + 1}{\sin x - 2} \,\mathrm{d}x \,.$$

Příklad (Mat III - 14/15E)**.** Spočtěte integrál

$$\int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{3 + 2\sin^2 x - \cos^2 x}{1 + \sin x \cdot \cos x} \,\mathrm{d}x \,.$$

Příklad (Mat III - 14/15D)**.** Nalezněte následující primitivní funkci na maximálním intervalu:

$$\int \frac{\log^3 x + 6\log^2 x + 5\log x - 38}{x(\log^2 x + 3\log x + 3)(\log^2 x + 4)(\log x + 2)} \,\mathrm{d}x \,.$$

Příklad (Mat III - 11/12A)**.** Nalezněte následující primitivní funkci na maximálním intervalu:

$$\int \frac{1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{1 - \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}} \,\mathrm{d}x \,.$$

Příklad (Mat III - 06/07D)**.** Nalezněte následující primitivní funkci na maximálním intervalu:

$$\int x \log\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \,\mathrm{d}x \,.$$

Příklad (Mat III - 00/01D)**.** Spočtěte integrál

$$\int\limits_0^{\pi} (x^2 \sin x + e^x) \,\mathrm{d}x \,.$$

Příklad (Mat III - 20/21B)**.** Spočtěte integrál

$$\int\limits_0^{7\pi} \frac{1 + \sin x + \cos x}{3 + 2\sin x + \cos x} \,\mathrm{d}x \,.$$

Další příklady na primitivní funkce - řešení

Příklad. Nalezněte následující primitivní funkci na maximálním intervalu existence:

$$I := \int \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x \cdot (\cos x + 1)} \, \mathrm{d}x \, .$$

Řešení.

Vidíme, že integrand je definovaný, a spojitý, na intervalech $I_k := (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$, primitivní funkci bychom tedy chtěli najít právě zde. Integrand je dále lichý v $\sin x$, dává tedy smysl použít substituci $\cos x = y$, to znamená

$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \, \mathrm{d}y \, , \, \sin x = \sqrt{1-y^2}.$$

Po této transformaci postupně máme, že

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1-y^2+1}{\sqrt{1-y^2} \cdot (y+1)} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \, \mathrm{d}y = \int \frac{y^2-2}{(1-y)(1+y)^2} \, \mathrm{d}y \\ &= \int \left(\frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} + \frac{C}{(1+y)^2} \right) \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Koeficienty v parciálním rozkladu určíme standardně. Pomocí zakrývací metody vidíme, že

$$\begin{aligned} y = 1 &\implies A = -\frac{1}{4} \, , \\ y = -1 &\implies C = -\frac{1}{2} \, . \end{aligned}$$

K nalezení B zlomky roznásobíme

$$\begin{aligned} y^2 - 2 &= -\frac{1}{4}(1+y)^2 + B(1-y)(1+y) - \frac{1}{2}(1-y) \\ y^2 - 2 &= -\frac{1}{4}(1+2y+y^2) + B(1-y^2) - \frac{1}{2}(1-y) \\ y^2 - 2 &= \left(-\frac{1}{4} - B\right) y^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) y + \left(-\frac{1}{4} + B - \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

a tedy

$$B = -\frac{5}{4} \, .$$

Jednotlivé zlomky už umíme snadno integrovat, tj.

$$\begin{aligned} I &\overset{c}{=} \frac{1}{4} \log|\cos x - 1| - \frac{5}{4} \log|1 + \cos x| + \frac{1}{2(1+\cos x)} \, , x \in I_k \\ &\overset{c}{=} \frac{1}{4} \log(1 - \cos x) - \frac{5}{4} \log(1 + \cos x) + \frac{1}{2(1+\cos x)} \, , x \in I_k. \end{aligned}$$

To, že primitivní funkce vyjde opravdu na těchto intervalech plyne z 1VOS. Totiž,

$$\begin{aligned} f(y) &:= \frac{1-y^2+1}{\sqrt{1-y^2} \cdot (y+1)} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \, , y \in (-1, 1), \\ F(y) &:= \frac{1}{4} \log|y - 1| - \frac{5}{4} \log|1 + y| + \frac{1}{2(1+y)} \, , y \in (-1, 1), \\ \varphi(t) &:= \cos t. \end{aligned}$$

No a vidíme, že $\varphi \in C^1(I_k)$ a na těchto intervalech je $\mathcal{H}_\varphi \subset (-1, 1)$. Věta nám proto říká, že

$$\int \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x \cdot (\cos x + 1)} \mathrm{d}x \overset{c}{=} F(\varphi(x)), \, x \in I_k.$$

△

Příklad. Nalezněte následující primitivní funkci na maximálním intervalu existence:

$$I := \int \frac{\cos x + 1}{\sin x - 2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení.

Vidíme, že integrand je definovaný, a spojitý, na $\mathbb{R}$, primitivní funkci bychom tedy chtěli na celém $\mathbb{R}$. Integrand není ani lichý v jednotlivých proměnných, ani sudý v obou, zbývá nám tedy použít substituci $y = \tan\frac{x}{2}$, to znamená

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\,,\ \sin x = \frac{2y}{1+y^2}\,,\ \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}\,.$$

Po této transformaci postupně máme, že

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{1-y^2}{1+y^2}+1}{\frac{2y}{1+y^2}-2}\cdot\frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1-y^2+1+y^2}{y-1-y^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= -2\int \frac{1}{(y^2-y+1)(1+y^2)}\,\mathrm{d}y = -2\int\left(\frac{Ay+B}{y^2-y+1}+\frac{Cy+D}{y^2+1}\right)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Vynásobením společným jmenovatelem získáme, že

$$\begin{aligned} 1 &= (Ay+B)(y^2+1)+(Cy+D)(y^2-y+1) \\ 1 &= Ay^3+By^2+Ay+B+Cy^3-Cy^2+Dy^2+Cy-Dy+D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ B-C+D &= 0 \\ A+C-D &= 0 \\ B+D &= 1. \end{aligned}$$

Z první rovnice je $A=-C$, dosazením do třetí je $D=0$, ze čtvrté tedy $B=1$, díky druhé $C=1$ a z první $A=-1$. Můžeme tedy pokračovat ve výpočtu

$$\begin{aligned} I &= -2\int\left(\frac{-y+1}{y^2-y+1}+\frac{y}{y^2+1}\right)\mathrm{d}y = -2\int\frac{(2y-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{y^2-y+1} - 2\int\frac{(2y)\cdot\frac{1}{2}}{y^2+1}\,\mathrm{d}y \\ &= -\log(y^2+1)+\log(y^2-y+1)-\int\frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}y \\ &= -\log(y^2+1)+\log(y^2-y+1)-\int\frac{1}{\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}y \\ &\overset{c}{=} -\log(y^2+1)+\log(y^2-y+1)-\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}\arctan\frac{2y+1}{\sqrt{3}} \\ &\overset{c}{=} -\log\left(\tan^2\frac{x}{2}+1\right)+\log\left(\tan^2\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}+1\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Tento vzorec dává smysl na intervalech $I_k = (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi), k\in\mathbb{Z}$, tam totiž dává smysl naše substituce. Ta se použije takto:

$$\begin{aligned} f(y) &:= -\frac{2}{(y^2-y+1)(1+y^2)}\,, y\in\mathbb{R}, \\ F(y) &:= -\log(y^2+1)+\log(y^2-y+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\,, y\in\mathbb{R}, \\ \varphi(t) &:= \tan\frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Vidíme, že $\varphi\in C^1(I_k)$ a $\mathcal{H}_\varphi\subset\mathbb{R}$, podle 1VOS proto máme, že

$$\int\frac{\cos x+1}{\sin x-2}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} F(\varphi(x)), x\in I_k.$$

To ale není celé. My hledáme primitivní funkci na větší množině (a víme, že existuje, protože integrand je na ní spojitý). Na intervalech I_k máme primitivní funkci ve tvaru

$$G(x) := \log \frac{\tan^2 \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} + 1}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + c_k, c_k \in \mathbb{R}.$$

Potřebujeme tedy funkci G slepit (volbou konstant c_k) v bodech $\pi+2k\pi$. Zafixujme si konstantu $c := c_0$ (na intervalu I_0). Pak máme

$$\begin{aligned} \lim_{x \to (\pi+2k\pi)_-} G(x) &= -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k, \\ \lim_{x \to (\pi+2k\pi)_+} G(x) &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_{k+1}. \end{aligned}$$

Jelikož chceme, aby výsledná funkce byla spojitá, tak chceme, aby se limity výše rovnaly, tj.

$$c_{k+1} = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} + c_k \implies c_k = -\frac{2k\pi}{\sqrt{3}} + c, k \in \mathbb{Z}.$$

Jelikož integrand i funkce G jsou nyní spojité na celém $\mathbb{R}$, tak z věty o lepení získáváme, že všechny spojité primitivní funkce mají tvar

$$G(x) = \begin{cases} \log \frac{\tan^2 \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} + 1}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} - \frac{2k\pi}{\sqrt{3}} + c, x \in I_k \\ -\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2k\pi}{\sqrt{3}} + c, x = \pi + 2k\pi \end{cases},$$

kde $c \in \mathbb{R}$.

$\triangle$

Příklad. Spočtěte integrál

$$I := \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{3 + 2\sin^2 x - \cos^2 x}{1 + \sin x \cdot \cos x} \, \mathrm{d}x \, .$$

Řešení. Zamysleme se nejdříve, jak bychom mohli najít primitivní funkci samotnou. Jelikož je integrand sudý v obou proměnných, tak lze použít substituci $y = \tan x$, ta ovšem funguje na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (a periodicky dalších). Jelikož je integrand jistě 2π-periodická funkce (jakožto součet, součin a podíl takových funkcí), tak můžeme integrovat i přes jiný interval délky 2π, tj.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{3 + 2\sin^2 x - \cos^2 x}{1 + \sin x \cdot \cos x} \, \mathrm{d}x.$$

Kdyby byla funkce dokonce π-periodická, tak by došlo k ještě většímu zjednodušení. Zkusme to tedy ověřit, máme

$$\begin{aligned} \sin^2(x + \pi) &= (\sin x \cdot \cos \pi + \sin \pi \cdot \cos x)^2 = \sin^2 x \\ \cos^2(x + \pi) &= (\cos x \cdot \cos \pi - \sin \pi \cdot \sin x)^2 = \cos^2 x \\ \sin(x + \pi) \cdot \cos(x + \pi) &= (\sin x \cdot \cos \pi)(\cos x \cdot \cos \pi) = \sin x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Celý integrand je tedy π-periodický, máme proto

$$I = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 + 2\sin^2 x - \cos^2 x}{1 + \sin x \cdot \cos x} \, \mathrm{d}x.$$

Nyní použijeme substituci (pro určitý integrál) $y = \tan x$, a tedy

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{1 + y^2} \mathrm{d}y, \, \sin x = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} \, , \, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \, .$$

Výpočet postupně dává

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{3+\frac{2y^2}{1+y^2}-\frac{1}{1+y^2}}{1+\frac{y}{1+y^2}}\cdot\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{5y^2+2}{(y^2+y+1)(y^2+1)}\mathrm{d}y \\
&= 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{Ay+B}{y^2+y+1}+\frac{Cy+D}{y^2+1}\right)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Pro koeficienty má platit

$$
\begin{aligned}
5y^2+2 &= (Ay+B)(y^2+1)+(Cy+D)(y^2+y+1) \\
5y^2+2 &= Ay^3+By^2+Ay+B+Cy^3+Cy^2+Dy^2+Cy+Dy+D
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A+C &= 0 \\
B+C+D &= 5 \\
A+C+D &= 0 \\
B+D &= 2.
\end{aligned}
$$

Dosazením první rovnice do třetí máme, že $D=0$, ze čtvrté následně je $B=2$, ze druhé $C=3$ a z první $A=-3$. Dostali jsme tedy

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{-3y+2}{y^2+y+1}+\frac{3y}{y^2+1}\right)\mathrm{d}y = 3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y + 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(2y+1)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{7}{2}}{y^2+y+1}\,\mathrm{d}y \\
&= \left[3\log(y^2+1)-3\log(y^2+y+1)\right]_{y=-\infty}^{y=+\infty} + 7\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}y \\
&= \left[3\log\frac{y^2+1}{y^2+y+1}\right]_{y=-\infty}^{y=+\infty} + 7\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}y \\
&= 7\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\arctan\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right]_{y=-\infty}^{y=+\infty} \\
&= \frac{14\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

$\triangle$

Příklad. Nalezněte následující primitivní funkci na maximálním intervalu existence:

$$
I := \int \frac{\log^3 x + 6\log^2 x + 5\log x - 38}{x(\log^2 x + 3\log x + 3)(\log^2 x + 4)(\log x + 2)}\,\mathrm{d}x\,.
$$

Řešení. Vidíme, že integrand je definovaný, a spojitý, na intervalech $(0, e^{-2}), (e^{-2}, +\infty)$, zde tedy chceme najít primitivní funkci. Nabízí se volit substituci $y = \log x$, postupně máme

$$
I = \int \frac{y^3+6y^2+5y-38}{(y^2+3y+3)(y^2+4)(y+2)}\,\mathrm{d}y = \int \frac{Ay+B}{y^2+3y+3} + \int\frac{Cy+D}{y^2+4} + \int\frac{E}{y+2}\,.
$$

Zakrýváním získáme, že $E = \frac{-8+24-10-38}{(4-6+3)(8)} = -\frac{32}{8} = -4$. Rovnice pro koeficienty říká

$$
\begin{aligned}
y^3+6y^2+5y-38 &= (Ay+B)(y^2+4)(y+2)+(Cy+D)(y^2+3y+3)(y+2)-4(y^2+3y+3)(y^2+4) \\
&= Ay^4+By^3+4Ay^2+4By+2Ay^3+2By^2+8Ay+8B \\
&\quad + (Cy^2+2Cy+Dy+2D)(y^2+3y+3)-4(y^4+3y^3+3y^2+4y^2+12y+12) \\
&= (A-4)y^4+(B+2A-12)y^3+(4A+2B-28)y^2+(4B+8A-48)y+(8B-48) \\
&\quad + Cy^4+3Cy^3+3Cy^2+2Cy^3+6Cy^2+6Cy+Dy^3+3Dy^2+3Dy+2Dy^2+6Dy+6D,
\end{aligned}
$$

a tedy

$$\begin{aligned}
0 &= A - 4 + C \\
1 &= B + 2A - 12 + 3C + 2C + D \\
6 &= 4A + 2B - 28 + 3C + 6C + 3D + 2D \\
5 &= 4B + 8A - 48 + 6C + 3D + 6D \\
-38 &= 8B - 48 + 6D.
\end{aligned}$$

Upravíme to, pak využijeme první a pátou rovnost ke zmenšení koeficientů v ostatních rovnicích (a čtvrtou potom vydělíme dvěma), tj.

$$\begin{aligned}
4 &= A + C \\
5 &= B + 3C + D \\
18 &= 2B + 5C + 5D \\
12 &= A + 3D \\
5 &= 4B + 3D.
\end{aligned}$$

Maticově dostáváme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 5 & 18 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -12 & -1 & -15 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -37 & -111 \end{array}\right)$$

Tedy, $D = 3$, $C = 1$, $B = -1$ a $A = 3$. Máme tedy

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{3y-1}{y^2+3y+3} + \int \frac{y+3}{y^2+4} - \int \frac{4}{y+2} \\
&= -4\log|y+2| + \int \frac{2y \cdot \frac{1}{2} + 3}{y^2+4} + \int \frac{(2y+3)\cdot\frac{3}{2} - \frac{9}{2} - 1}{y^2+3y+3} \\
&= -4\log|y+2| + \frac{1}{2}\log(y^2+4) + \frac{3}{2}\log(y^2+3y+3) + \int \frac{3}{\left(\frac{y}{2}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{4} - \frac{11}{2}\int \frac{1}{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= -4\log|y+2| + \frac{1}{2}\log(y^2+4) + \frac{3}{2}\log(y^2+3y+3) + \frac{3}{4}\arctan\frac{y}{2} - \frac{11}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{y+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}} \\
&\overset{c}{=} -4\log|\log x + 2| + \frac{1}{2}\log(\log^2 x + 4) + \frac{3}{2}\log(\log^2 x + 3\log x + 3) \\
&\quad + \frac{3}{4}\arctan\frac{\log x}{2} - \frac{22}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2\log x + 3}{\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

a to dává smysl na intervalech $(0, e^{-2}), (e^{-2}, +\infty)$.

△

Příklad. Nalezněte následující primitivní funkci na maximálním intervalu existence:

$$I := \int \frac{1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{1 - \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení.

Integrand je definovaný na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$, tady tedy hledáme primitivní funkci. Nabízí se volit substituci $\frac{x+1}{x-1} = y^4$, tj.

$$\begin{aligned}
x + 1 &= xy^4 - y^4 \\
x &= -\frac{1+y^4}{1-y^4} \\
\mathrm{d}x &= -\frac{4y^3(1-y^4) - (1+y^4)(-4y^3)}{(1-y^4)^2}\,\mathrm{d}y = \frac{-8y^3}{(1-y^4)^2}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Postupně získáváme

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1+y^2}{1-y} \cdot \frac{-8y^3}{(1-y^4)^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{8y^3}{(y-1)(y^2-1)^2(y^2+1)}\,\mathrm{d}y \\
&= \int \frac{8y^3}{(y+1)^2(y-1)^3(y^2+1)}\,\mathrm{d}y \\
&= \int \left(\frac{A}{y+1} + \frac{B}{(y+1)^2} + \frac{C}{y-1} + \frac{D}{(y-1)^2} + \frac{E}{(y-1)^3} + \frac{Fy+G}{y^2+1} \right) \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Zakrývací metodou vidíme, že $B = \frac{1}{2}$ a $E = 1$. Pro zjištění hodnot zbývajících koeficientů sestavíme standardní soustavu, tj.

$$\begin{aligned}
8y^3 &= A(y+1)(y-1)^3(y^2+1) + \frac{1}{2}(y-1)^3(y^2+1) + C(y+1)^2(y-1)^2(y^2+1) \\
&\quad + D(y+1)^2(y-1)(y^2+1) + (y+1)^2(y^2+1) + (Fy+G)(y+1)^2(y-1)^3 \\
&= A(y^3+y^2+y+1)(y^3-3y^2+3y-1) + \frac{1}{2}(y^3-3y^2+3y-1)(y^2+1) \\
&\quad + C(y^4-2y^2+1)(y^2+1) + D(y^2+2y+1)(y^3-y^2+y-1) + (y^4+2y^3+2y^2+2y+1) \\
&\quad + (Fy+G)(y^2+2y+1)(y^3-3y^2+3y-1).
\end{aligned}$$

Dostáváme (ze členů u y^6, y^5, y^4, y^3, y^0)

$$\begin{aligned}
0 &= A + C + F \\
0 &= -2A + \frac{1}{2} + D + G - 3F + 2F = -2A + \frac{1}{2} + D - F + G \\
0 &= 3A - 3A + A - \frac{3}{2} + C - 2C - D + 2D + 1 + 3F - 6F + F - 3G + 2G = \\
&= A - \frac{1}{2} - C + D - 2F - G \\
8 &= -A + 3A - 3A + A + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + D - 2D + D + 2 - F + 6F - 3F + 3G - 6G + G = \\
&= 4 + 2F - 2G \\
0 &= -A - \frac{1}{2} + C - D + 1 - G = -A + \frac{1}{2} + C - D - G,
\end{aligned}$$

tj.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 0 & 1 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\
1 & -1 & 1 & -2 & -1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\
-1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2}
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\
0 & -2 & 1 & -3 & -1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\
0 & 2 & -1 & 1 & -1 & -\frac{1}{2}
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\
0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0
\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4
\end{array}\right)$$

Z toho postupně plyne, že $G = -1$, $F = 1$, $D = 1$, $C = -\frac{3}{4}$ a $A = -\frac{1}{4}$. Teď už jen všech 6 integrálů standardně spočteme:

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{y+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{3}{4}\int \frac{1}{y-1} + \int \frac{1}{(y-1)^2} + \int \frac{1}{(y-1)^3} + \int \frac{2y\cdot\frac{1}{2}-1}{y^2+1} \\
&\overset{c}{=} -\frac{1}{4}\log\left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}+1\right) - \frac{1}{2\left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)} - \frac{3}{4}\log\left|\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right| \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}-1} - \frac{1}{2\left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right)^2} + \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right) - \arctan\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}\,.
\end{aligned}$$

Celá primitivní funkce dává smysl na výše řečených intervalech, že jde opravdu o ně, plyne z použití 1VOS.

△

Příklad (Mat III - 06/07D)**.** Nalezněte následující primitivní funkci na maximálním intervalu existence:

$$I := \int x\log\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení.

Funkce je evidentně definovaná na intervalu $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, zde proto hledáme primitivní funkci. Nabízí se použít integraci per partes, máme

$$I \;\left|\begin{array}{cc} D & I \\ \log\left(1-\frac{x^2}{2}\right) & x \\ \frac{-x}{1-\frac{x^2}{2}} & \frac{1}{2}x^2 \end{array}\right| = \frac{1}{2}x^2\log\left(1-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\int\frac{2x^3}{2-x^2}.$$

Racionální funkci v integrálu zjednodušíme, je totiž

$$x^3 : (-x^2+2) = -x + \frac{2x}{2-x^2},$$

a proto

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}x^2\log\left(1-\frac{x^2}{2}\right) + \int\left(-x + \frac{2x}{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}\right) \\
&= \frac{1}{2}x^2\log\left(1-\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}x^2 + \int\left(\frac{A}{\sqrt{2}+x} + \frac{B}{\sqrt{2}-x}\right).
\end{aligned}$$

Použitím zakrývací metody ihned zjišťujeme, že $A = -1$, $B = 1$. Konečně

$$\begin{aligned}
I &\overset{c}{=} \frac{1}{2}x^2\log\left(1-\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}x^2 - \log|x+\sqrt{2}| - \log|x-\sqrt{2}| \\
&\overset{c}{=} \frac{1}{2}x^2\log\left(1-\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}x^2 - \log(x^2-2)
\end{aligned}$$

na intervalu $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

△

Příklad (Mat III - 00/01D)**.** Spočtěte integrál

$$I := \int_0^{\pi} (x^2\sin x + e^x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení.

Z linearity a známého integrálu vyřešíme jednu část integrandu a na zbývající použijeme dvakrát metodu per partes, tj.

$$
\begin{aligned}
I \quad \left|\begin{array}{cc} D & I \\ x^2 & \sin x \\ 2x & -\cos x \end{array}\right| &= \left[e^x\right]_0^\pi + \left[-x^2\cos x\right]_0^\pi + 2\int_0^\pi x\cos x \quad \left|\begin{array}{cc} D & I \\ x & \cos x \\ 1 & \sin x \end{array}\right| \\
&= e^\pi - 1 - \pi^2\cos\pi + 2\left(\left[x\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\right) \\
&= \pi^2 + e^\pi - 1 - 2\left[-\cos x\right]_0^\pi \\
&= \pi^2 + e^\pi - 5.
\end{aligned}
$$

△

Příklad (Mat III - 20/21B)**.** Spočtěte integrál

$$I := \int_0^{7\pi} \frac{1+\sin x+\cos x}{3+2\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení.

Vidíme, že integrand je definovaný na celém $\mathbb{R}$ (funkce sin a cos nejsou nikdy naráz nulové), má zde tedy smysl hledat primitivní funkci a zadaný určitý integrál tedy má smysl rovněž. Primitivní funkci bychom mohli nalézt použitím substituce $y = \tan\frac{x}{2}$, integrand totiž postrádá symetrie potřebné k použití některé z jednodušších substitucí. Tato substituce dobře funguje např. na intervalu $(-\pi, \pi)$, proto tedy zadaný integrál přepíšeme (s využitím 2π-periodicity) do tvaru

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{6\pi} \frac{1+\sin x+\cos x}{3+2\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x + \int_{6\pi}^{7\pi} \frac{1+\sin x+\cos x}{3+2\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= 3\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\sin x+\cos x}{3+2\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \frac{1+\sin x+\cos x}{3+2\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Pro jednoduchost označme

$$J := \int \frac{1+\sin x+\cos x}{3+2\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

a použijme řečenou substituci, máme

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\,,\ \sin x = \frac{2y}{1+y^2}\,,\ \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}\,,$$

a tedy

$$
\begin{aligned}
J &= \int \frac{1+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}}{3+\frac{4y}{1+y^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}}\cdot\frac{2}{1+y^2}\mathrm{d}y = 2\int \frac{1+y^2+2y+1-y^2}{3(1+y^2)+4y+1-y^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int \frac{y+1}{y^2+2y+2}\cdot\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = 2\int\left(\frac{Ay+B}{y^2+2y+2}+\frac{Cy+D}{y^2+1}\right)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

pro koeficienty z rozkladu na parciální zlomky sestavíme standardní soustavu:

$$
\begin{aligned}
y+1 &= (Ay+B)(y^2+1) + (Cy+D)(y^2+2y+2) \\
&= Ay^3 + By^2 + Ay + B + Cy^3 + 2Cy^2 + Dy^2 + 2Cy + 2Dy + 2D
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= A + C \\
0 &= B + 2C + D \\
1 &= A + 2C + 2D \\
1 &= B + 2D.
\end{aligned}
$$

Z první rovnice můžeme vyjádřit $A = -C$, z druhé $B = -2C - D$ a čtvrtá rovnice říká, že

$$1 = -2C - D + 2D = D - 2C,$$

tedy $D = 1 + 2C$ a zpětně $B = -2C - D = -1 - 4C$. Dosazením do třetí rovnice konečně

$$\begin{aligned} 1 &= -C + 2C + 2 + 4C \\ -1 &= 5C. \end{aligned}$$

Máme tedy $C = -\frac{1}{5}$, $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$ a $D = \frac{3}{5}$. Pro náš neurčitý integrál dostáváme

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{5}\int \frac{y-1}{y^2+2y+2} + \frac{2}{5}\int \frac{-y+3}{y^2+1} = \frac{2}{5}\int \frac{(2y+2)\cdot\frac{1}{2} - 2}{y^2+2y+2} + \frac{2}{5}\int \frac{2y\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3}{y^2+1} \\ &= \frac{1}{5}\log(y^2+2y+2) - \frac{4}{5}\int \frac{1}{(y+1)^2+1} - \frac{1}{5}\log(y^2+1) + \frac{6}{5}\arctan y \\ &= \frac{1}{5}\log\frac{y^2+2y+2}{y^2+1} + \frac{6}{5}\arctan y - \frac{4}{5}\arctan(y+1). \end{aligned}$$

Pro původní integrál (po přepočtu mezí při substituci) tedy máme

$$\begin{aligned} I &= 3\left[\frac{1}{5}\log\frac{y^2+2y+2}{y^2+1} + \frac{6}{5}\arctan y - \frac{4}{5}\arctan(y+1)\right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \left[\frac{1}{5}\log\frac{y^2+2y+2}{y^2+1} + \frac{6}{5}\arctan y - \frac{4}{5}\arctan(y+1)\right]_{0}^{\infty} \\ &= 3\cdot\frac{6}{5}\cdot\pi - 3\cdot\frac{4}{5}\cdot\pi - \frac{1}{5}\log 2 + \frac{6}{5}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{4}{5}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{4}{5}\arctan 1 \\ &= -\frac{1}{5}\log 2 + \frac{18-12+3-2}{5}\pi + \frac{4}{5}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{8\pi}{5} - \frac{1}{5}\log 2. \end{aligned}$$

△