Příklady na 2. bonusové cvičení

Příklad 1. Nalezněte supremum a infimum funkce

$$f(x,y,z) := xy^2 - x$$

na množině

$$M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4, x - z \geq 0\}$$

a pokud se jich nabývá, určete kde.

<u>Řešení.</u>

Množina je zjevně omezená, protože se jedná o část sféry. (Alternativní argument je, že $|x|, \sqrt{2}|y|, \sqrt{3}|z| \leq \sqrt{4}$.) Dále je uzavřená jakožto průnik dvou uzavřených množin, konkrétně $\{x^2+2y^2+3z^2 = 4\}$ a $\{x - z \geq 0\}$. Ty jsou uzavřené na základě věty o úrovňových množinách (díky spojitosti polynomů). Celkem je tedy M kompaktní, a protože je f spojitá, tak zde nabývá minima i maxima.

Označme

$$\varphi(x,y,z) := x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4$$
$$\psi(x,y,z) := x - z$$

a napočítejme si relevantní gradienty:

$$\nabla f = (y^2 - 1, 2xy, 0)$$
$$\nabla\varphi = (2x, 4y, 6z)$$
$$\nabla\psi = (1, 0, -1).$$

S tímto značením můžeme množinu M napsat ve tvaru

$$M = M_1 \cup M_2,$$

kde

$$M_1 := \{\varphi = 0, \psi > 0\},$$
$$M_2 := \{\varphi = 0, \psi = 0\}.$$

Jelikož zde má f extrémy, tak leží v některé z těchto dvou množin.

Množina M_1. Jelikož f, φ jsou diferencovatelné dokonce na celém prostoru, tak lze použít větu o Lagrangeově multiplikátoru (s $G_1 := \{\psi > 0\}$ - otevřená). Nastává tedy jedna z možností:

(a) Nulovost gradientu dává počátek, ten neleží v M_1.

(b) Existuje reálné číslo λ splňující

$$y^2 - 1 + 2\lambda x = 0$$
$$2xy + 4\lambda y = 0$$
$$6\lambda z = 0.$$

Díky třetí rovnici dostáváme dva disjunktní podpřípady:

- Je-li $\lambda = 0$, tak z první rovnice je $y = \pm 1$ a ze druhé $x = 0$. Vazba $\varphi = 0$ dále říká že $2 + 3z^2 = 4$, a tedy $z \in \{\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\}$. Ještě musíme zkontrolovat podmínku $\psi > 0$, tj. $0 > \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, máme tedy první dva podezřelé bod $\boxed{f\left(0, \pm 1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 0}$.
- Je-li $\lambda \neq 0$, a tedy $z = 0$, tak nám vazby mnoho neříkají. Podíváme se proto na druhou rovnici, máme $y(x + 2\lambda) = 0$.
  - ∗ Je-li $y = 0$, tak vazby říkají, že $x^2 = 4$ a zároveň $x > 0$, takže $\boxed{f(2,0,0) = -2}$.

$*$ Je-li $x = -2\lambda$, tak první rovnice říká, že $y^2 = 1+4\lambda^2$, dosazením do $\varphi = 0$ máme $4\lambda^2 + 2 + 8\lambda^2 = 4$, tj. $\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$. Máme tedy $x = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}$, kvůli $\psi > 0$ je v M_1 pouze bod $[\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\sqrt{\frac{5}{3}}, 0]$. Funkční hodnoty jsou $\boxed{f\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\sqrt{\frac{5}{3}}, 0\right) = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{3}}$.

Množina M_2 (efektivně). Zde leží body splňující obě vazby, takže $x = z$. Stačí proto zkoumat extrémy funkce $g(x,y) := f(x,y,x) = xy^2 - x$ na množině $N := \{4x^2 + 2y^2 = 4\}$. Díky diferencovatelnosti vazby i funkce g lze opět použít větu o Lagrangeově multiplikátoru a dostáváme dvě varianty:

(a) Nulovost gradientu dává počátek, ten neleží v N.

(b) Existuje reálné číslo λ splňující

$$\begin{aligned} y^2 - 1 + 8\lambda x &= 0 \\ 2xy + 4\lambda y &= 0. \end{aligned}$$

Můžeme vytknout v druhé rovnici, stejně jako předtím. Alternativně můžeme vzít yI $-2x$II, dostaneme

$$y(y^2 - 1 - 4x^2) = 0.$$

Máme tedy dva podpřípady.

– Je-li $y = 0$, tak z vazby plyne $x = \pm 1$. Máme proto body $\boxed{f(\pm 1, 0, \pm 1) = \mp 1}$.

– Je-li $y \neq 0$, tak $y^2 = 1 + 4x^2$. Z vazby máme $12x^2 = 2$, tj. $x = \pm\sqrt{\frac{1}{6}} = z$ a $y^2 = \frac{5}{3}$. Dostáváme proto čtyři podezřelé body $\boxed{f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{3}}$ a $\boxed{f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\sqrt{\frac{5}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{3}}$.

Závěr. Jelikož zjevně

$$\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{3} < 1 \iff 4 < 3\sqrt{6} \iff 16 < 9 \cdot 6 = 54$$

a ostatní hodnoty jsou nekladné, tak máme maximum 1 a f ho nabývá v bodě $[-1, 0, -1]$. Pro minimum zjevně stačí porovnat

$$-2 < -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{3} \iff 3\sqrt{6} > 1,$$

což platí, a máme tedy minimum -2 a f ho nabývá v bodech $[2, 0, 0]$.

$\triangle$

Pozn. *Totéž lze spočítat i pomocí dvou multiplikátorů, z tvaru $\nabla\psi$ se hodí zaměřit na prostřední rovnici, vytknout a rozvětvit na dva případy. Lineární závislost gradientů je přímočará.*

Příklad 2. Nalezněte supremum a infimum funkce

$$f(x,y,z) := x + 2y + 3z$$

na množině

$$M := \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 2, x^2 + y^2 + z^2 \le 3\}$$

a pokud se jich nabývá, určete kde.

Řešení.

Množina je zjevně omezená, protože se jedná o průnik dvou koulí. (Alternativní argument je, že $|x|, |y|, |z| \le \sqrt{3}$.) Dále je uzavřená jakožto průnik dvou uzavřených množin, konkrétně $\{x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 2\}$ a $\{x^2 + y^2 + z^2 \le 3\}$. Ty jsou uzavřené na základě věty o úrovňových množinách (díky spojitosti polynomů). Celkem je tedy M kompaktní, a protože je f spojitá, tak zde nabývá minima i maxima.

Označme

$$\varphi(x,y,z) := x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 2$$
$$\psi(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 3$$

a napočítejme si relevantní gradienty:

$$\nabla f = (1,2,3)$$
$$\nabla \varphi = (2x, 2y, 2(z-1))$$
$$\nabla \psi = (2x, 2y, 2z).$$

S tímto značením můžeme množinu M napsat ve tvaru

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4\,,$$

kde

$$M_1 := \{\varphi < 0, \psi < 0\},$$
$$M_2 := \{\varphi = 0, \psi < 0\},$$
$$M_3 := \{\varphi < 0, \psi = 0\},$$
$$M_4 := \{\varphi = 0, \psi = 0\}.$$

Jelikož zde má f extrémy, tak leží v některé z těchto čtyř množin.

Množina M_1. Jelikož φ, ψ jsou spojité, tak díky větě o úrovňových množinách je M_1 otevřená, a protože $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$, tak jedinými podezřelými body jsou ty, kde je ∇f nulový. To ale nikde nenastává.

Množina M_2. Jelikož f, φ jsou diferencovatelné dokonce na celém prostoru, tak lze použít větu o Lagrangeově multiplikátoru (s $G_2 := \{\psi < 0\}$ - otevřená). Nastává tedy jedna z možností:

(a) Nulovost gradientu dává $[0,0,1]$, ten ale neleží v M_2.

(b) Existuje reálné číslo λ splňující

$$1 + 2\lambda x = 0$$
$$2 + 2\lambda y = 0$$
$$3 + 2\lambda(z-1) = 0.$$

Nabízí se vzít yI$-x$II a $(z-1)$I$-x$III, dostaneme

$$y = 2x,$$
$$z - 1 = 3x.$$

Dosazením do $\varphi = 0$ získáváme

$$x^2 + 4x^2 + 9x^2 = 2,$$

což dává $x = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$, $y = \pm\frac{2}{\sqrt{7}}$, $z = 1 \pm \frac{3}{\sqrt{7}}$. Je třeba ještě zkontrolovat $\psi < 0$, tj.

$$\frac{1}{7} + \frac{4}{7} + 1 + \frac{9}{7} \pm \frac{6}{\sqrt{7}} - 3 = \pm\frac{6}{\sqrt{7}}\,,$$

a to je záporné pouze pro zápornou volbu znaménka, dostáváme podezřelý bod

$$\boxed{f\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{2}{\sqrt{7}}, 1 - \frac{3}{\sqrt{7}}\right) = -\frac{14}{\sqrt{7}} + 3 = 3 - 2\sqrt{7}}.$$

Množina M_3. Jelikož f, ψ jsou diferencovatelné dokonce na celém prostoru, tak lze použít větu o Lagrangeově multiplikátoru (s $G_3 := \{\varphi < 0\}$ - otevřená). Nastává tedy jedna z možností:

(a) Nulovost gradientu dává počátek, ten ale neleží v M_3.

(b) Existuje reálné číslo λ splňující

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0 \\ 2 + 2\lambda y &= 0 \\ 3 + 2\lambda z &= 0. \end{aligned}$$

Nabízí se vzít $y\mathrm{I} - x\mathrm{II}$ a $z\mathrm{I} - x\mathrm{III}$, dostaneme

$$\begin{aligned} y &= 2x, \\ z &= 3x. \end{aligned}$$

Dosazením do $\psi = 0$ získáváme

$$x^2 + 4x^2 + 9x^2 = 3,$$

což dává $x = \pm\sqrt{\frac{3}{14}}$, $y = \pm 2\sqrt{\frac{3}{14}}$, $z = \pm 3\sqrt{\frac{3}{14}}$. Je třeba ještě zkontrolovat $\varphi < 0$, tj.

$$\frac{3}{14} + 4 \cdot \frac{3}{14} + 9 \cdot \frac{3}{14} + 1 \mp 6\sqrt{\frac{3}{14}} - 2 = 2 \mp 6\sqrt{\frac{3}{14}}\,,$$

kladná varianta tedy evidentně není možná, ověřme druhou

$$\begin{aligned} 2 - 6\sqrt{\frac{3}{14}} &< 0 \\ \iff 1 &< 3\sqrt{\frac{3}{14}} \\ \iff 14 &< 9 \cdot 3, \end{aligned}$$

což platí, máme tedy podezřelý bod

$$\boxed{f\left(\sqrt{\frac{3}{14}}, 2\sqrt{\frac{3}{14}}, 3\sqrt{\frac{3}{14}}\right) = 14\sqrt{\frac{3}{14}} = \sqrt{42}}.$$

Množina M_4 (efektivně). Zde leží body splňující obě vazby, když je odečteme, tak máme, že $(z-1)^2 - z^2 - 2 + 3 = 0$, a tedy $z = 1$. Stačí tedy zkoumat extrémy $g(x, y) := f(x, y, 1) = x + 2y + 3$ vůči $N := \{x^2 + y^2 = 2\}$. Díky diferencovatelnosti vazby i funkce g můžeme použít větu o Lagrangeově multiplikátoru a máme dvě možnosti.

(a) Nulovost gradientu dává počátek, ten ale neleží v N.

(b) Existuje reálné číslo λ splňující

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0 \\ 2 + 2\lambda y &= 0. \end{aligned}$$

Nabízí se vzít yI$-x$II, dostaneme $y = 2x$. Dosazením do vazby získáváme získáváme $5x^2 = 2$, což dává $x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$, $y = \pm 2\sqrt{\frac{2}{5}}$. Našli jsme tedy podezřelé body

$$\boxed{f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{5}}, \pm 2\sqrt{\frac{2}{5}}, 1\right) = 3 \pm 5\sqrt{\frac{2}{5}} = 3 \pm \sqrt{10}}.$$

Závěr. Je zjevné, že $3 - \sqrt{10} > 3 - 2\sqrt{7}$, takže f nabývá minima $3 - 2\sqrt{7}$ v bodě $\left[-\frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{2}{\sqrt{7}}, 1 - \frac{3}{\sqrt{7}}\right]$. Co je největší hodnota vidět není, počítejme

$$\begin{aligned} \sqrt{42} &> 3 + \sqrt{10} \\ \iff 42 &> 9 + 10 + 6\sqrt{10} \\ \iff 23 &> 6\sqrt{10} \\ \iff 400 + 9 + 60 = (20+3)^2 = 23^2 &> 360, \end{aligned}$$

takže f má maximum $\sqrt{42}$ v bodě $\left[\sqrt{\frac{3}{14}}, 2\sqrt{\frac{3}{14}}, 3\sqrt{\frac{3}{14}}\right]$.

△

Pozn. *Totéž lze dopočítat ovšem i pomocí dvou multiplikátorů. Lineární závislost gradientů vazeb není těžká. Dále je nejlepší vhodně přenásobit první dvě rovnice a získat $y = 2x$. Potom z naší dvojice vazeb získat x a z.*

Příklad 3. Na maximálních intervalech existence najděte primitivní funkci

$$\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{(\sin x + 2)(\cos x + 1)} \mathrm{d}x.$$

Řešení.

Integrand je evidentně definovaný (a spojitý) pro $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má proto primitivní funkci na intervalech $I_k := (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Hodí se (a jinou ani nelze použít) aplikovat substituci je $y = \tan \frac{x}{2}$. Platí

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\,,\ \sin x = \frac{2y}{1+y^2}\,,\ \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}\,.$$

Přetransformujme integrál a upravme

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2y}{1+y^2}\cdot\frac{1-y^2}{1+y^2}}{(\frac{2y}{1+y^2}+2)(\frac{1-y^2}{1+y^2}+1)} \cdot \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2y(1-y^2)}{(2y^2+2y+2)\cdot 2} \cdot \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int \frac{y(1-y^2)}{(y^2+y+1)(1+y^2)}\,\mathrm{d}y = \int \left(\frac{Ay+B}{y^2+y+1} + \frac{Cy+D}{y^2+1} \right) \mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Nyní sestavíme obvyklou soustavu:

$$\begin{aligned} -y^3 + y &= (Ay+B)(y^2+1) + (Cy+D)(y^2+y+1) \\ &= Ay^3 + By^2 + Ay + B + Cy^3 + Cy^2 + Dy^2 + Cy + Dy + D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 &= A + C \\ 0 &= B + C + D \\ 1 &= A + C + D \\ 0 &= B + D. \end{aligned}$$

Ze čtvrté rovnice máme $D = -B$, dosazením do druhé dostáváme $C = 0$, díky první $A = -1$ a ze třetí plyne $D = 2 = -B$. Teď jednotlivé výrazy rutinně zintegrujeme, postupně máme

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{-y+2}{y^2+y+1} + \frac{2}{y^2+1} \right) \mathrm{d}y = \int \frac{(2y+1)\cdot\frac{-1}{2} + \frac{5}{2}}{y^2+y+1}\,\mathrm{d}y + 2\arctan y \\ &= -\frac{1}{2}\log(y^2+y+1) + 2\arctan y + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{2}\log(y^2+y+1) + 2\arctan y + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}y \\ &\overset{c}{=} -\frac{1}{2}\log\left(\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + 1\right) + 2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \frac{10}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\,, \\ &\overset{c}{=} -\frac{1}{2}\log\left(\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + 1\right) + x + \frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\,, \end{aligned}$$

tento vztah platí pro $x \in I_k$, $k \in \mathbb{Z}$, což je maximální interval existence.

△

Pozn. *Kdyby byl ve jmenovateli člen* $\cos x - 1$*, tak je výpočet trochu náročnější, kvůli faktoru* $2y^2$ *ve jmenovateli. Funkce bude mít primitivní funkci na intervalech* $(-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi)$, $(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$. *V bodech* $2k\pi$ *ji nemá smysl lepit, protože integrand tam není ani definovaný.*

Pozn. *V poslední rovnosti jsme použili, že* $\arctan(\tan x) = x - k\pi$ *pro* $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. *Konstanta* $-k\pi$ *je tedy obsažená v symbolu "*$\overset{c}{=}$*", na každém intervalu* I_k *je jiná. To platí takto:*

$$\arctan(\tan x) \overset{periodicita}{=} \arctan(\tan(x - k\pi)) = x - k\pi \ \textit{pro}\ x - k\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

víme totiž, z definice, že $\arctan(\tan x) = x$ *pro* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Příklad 4. Na maximálních intervalech existence najděte primitivní funkci

$$\int \frac{\sin^2 x}{2+\sin^2 x}\mathrm{d}x.$$

Řešení.

Integrand je zjevně definovaný, a spojitý, na celé reálné ose, má zde proto spojitou primitivní funkci. Na intervalech $I_k := \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ dává smysl použít substituci $y = \tan x$, potom

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\,,\ \sin x = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,,\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,.$$

Integrál přetransformujeme, upravíme a rozložíme

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{y^2}{1+y^2}}{2+\frac{y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{y^2}{(3y^2+2)(y^2+1)}\,\mathrm{d}y \\ &= \int \left(\frac{Ay+B}{3y^2+2} + \frac{Cy+D}{y^2+1}\right)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Sestavíme standardní soustavu pro koeficienty

$$\begin{aligned} y^2 &= (Ay+B)(y^2+1) + (Cy+D)(3y^2+2) \\ &= Ay^3 + By^2 + Ay + B + 3Cy^3 + 3Dy^2 + 2Cy + 2D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= A + 3C \\ 1 &= B + 3D \\ 0 &= A + 2C \\ 0 &= B + 2D. \end{aligned}$$

Odečtením první a třetí rovnice máme $C = 0$, pak i $A = 0$. Odečtením druhé a třetí rovnice dostáváme $D = 1$, pak $B = -2$. Teď už integrály rutinně spočteme

$$\begin{aligned} I &= -2\int \frac{1}{3y^2+2}\,\mathrm{d}y + \int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \arctan y - 2\int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y \\ &\overset{c}{=} \arctan(\tan x) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{2}}\right) \overset{c}{=} x - \sqrt{\frac{2}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right) \end{aligned}$$

pro $x \in I_k$. Víme, že existuje spojitá primitivní funkce na celé reálné ose, takže my spojitě dodefinujeme právě nalezený integrál a to bude výsledek. Označme

$$F(x) := x - \sqrt{\frac{2}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right) + c_k,\ x \in I_k.$$

Pro jednostranné limity máme, že

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)_-} F(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + c_k \quad \text{a} \quad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)_+} F(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + c_{k+1}.$$

Chceme, aby se limity rovnaly, takže

$$c_{k+1} = c_k - \pi\sqrt{\frac{2}{3}},$$

označíme-li $c := c_0 \in \mathbb{R}$, tak tedy

$$c_k = c - k\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Hledaná primitivní funkce má tedy tvar (pro libovolné $c \in \mathbb{R}$)

$$F(x) = \begin{cases} x - \sqrt{\frac{2}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right) + c - k\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\,, x \in I_k \\ \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\cdot\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + c\,, x = \frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}.$$

△

Příklad 5. Spočtěte určitý integrál

$$\int_{-\log 2}^{0} \frac{e^{4x} + 4e^{3x} + 2e^{2x} + 2e^{x}}{e^{4x} + e^{3x} + e^{x} + 1} \mathrm{d}x.$$

Řešení.

Integrand je definovaný na celé reálné ose, takže integrál dává smysl. Volme substituci $e^x = y$, pak $e^x \mathrm{d}x = \mathrm{d}x$ a interval $(-\log 2, 0) = \left(\log \frac{1}{2}, 0\right)$ se (diferencovatelným) zobrazením $\varphi(x) := e^x$ zobrazí na interval $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Máme tedy

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{y^3 + 4y^2 + 2y + 2}{y^4 + y^3 + y + 1} \mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{y^3 + 4y^2 + 2y + 2}{y^3(y+1) + y + 1} \mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{y^3 + 4y^2 + 2y + 2}{(y^3+1)(y+1)} \mathrm{d}y \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{y^3 + 4y^2 + 2y + 2}{(y^2 - y + 1)(y+1)^2} \mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{A}{y+1} + \frac{B}{(y+1)^2} + \frac{Cy + D}{y^2 - y + 1} \right) \mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Zakrývací metodou ihned dostáváme, že $B = \frac{-1+4-2+2}{1+1+1} = 1$. Pro zjištění zbývajících koeficientů si sestavíme standardní soustavu:

$$\begin{aligned} y^3 + 4y^2 + 2y + 2 &= A(y+1)(y^2 - y + 1) + (y^2 - y + 1) + (Cy + D)(y^2 + 2y + 1) \\ &= Ay^3 - Ay^2 + Ay + Ay^2 - Ay + A + y^2 - y + 1 + Cy^3 \\ &\quad + 2Cy^2 + Cy + Dy^2 + 2Dy + D \\ &= Ay^3 + Cy^3 + y^2 + 2Cy^2 + Dy^2 - y + Cy + 2Dy + A + 1 + D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= A + C \\ 4 &= 1 + 2C + D \\ 2 &= -1 + C + 2D \\ 2 &= A + 1 + D. \end{aligned}$$

Z první rovnice máme $A = 1 - C$ a dosazením do čtvrté je $2 = 2 - C + D$, tj. $C = D$. Ze třetí rovnice nyní plyne $C = D = 1$ a díky první $A = 0$. Proto

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{y+1}{y^2 - y + 1} \right) \mathrm{d}y = \left[-\frac{1}{y+1} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(2y-1) \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{y^2 - y + 1} \mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \left[\frac{1}{2} \log(y^2 - y + 1) \right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{3}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \right) + \frac{3}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\left(\frac{y - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \log \frac{3}{4} + 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{2y - 1}{\sqrt{3}} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} (\log 4 - \log 3) + \sqrt{3} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{6} + \log 2 - \frac{1}{2} \log 3 + \frac{\sqrt{3}}{6} \pi\,. \end{aligned}$$

△

Příklad 6. Spočtěte určitý integrál

$$\int_{-1}^{2} \frac{x+2}{(x-3)(1+\sqrt{x+1})} \mathrm{d}x.$$

Řešení.

Integrand je definovaný pro $x > -1$ a intervaly existence budou $(-1,3), (3,+\infty)$. Náš příklad tedy dává smysl (integrujeme přes množinu, kde je integrand definovaný). Zbavme se odmocnin pomocí substituce $\sqrt{x+1} = y$, tj.

$$x = y^2 - 1,\ \mathrm{d}x = 2y\mathrm{d}y\,.$$

Integrál přetransformujeme a upravíme

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{y^2+1}{(y^2-4)(1+y)} \cdot 2y\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2y^3+2y}{(y-2)(y+2)(1+y)} \mathrm{d}y\,.$$

Než použijeme rozklad na parciální zlomky, tak je potřeba racionální funkci ještě vydělit, máme

$$(y-2)(y+2)(1+y) = (y^2-4)(y+1) = y^3 + y^2 - 4y - 4,$$

a tak

$$(2y^3+2y) : (y^3+y^2-4y-4) = 2 + \frac{-2y^2+10y+8}{y^3+y^2-4y-4}\,.$$

Nyní můžeme vytvořit rozklad

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \left(2 + \frac{-2y^2+10y+8}{(y-2)(y+2)(y+1)}\right) \mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{3}} \left(2 + \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+2} + \frac{C}{y-2}\right) \mathrm{d}y\,.$$

Pomocí zakrývací metody ihned získáváme, že $A = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$, $B = \frac{-20}{(-4)\cdot(-1)} = -5$ a $C = \frac{20}{4\cdot 3} = \frac{5}{3}$. Platí tedy

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(2 + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{y+1} - \frac{5}{y+2} + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{y-2}\right) \mathrm{d}y \\
&= \left[2y + \frac{4}{3}\log|y+1| - 5\log|y+2| + \frac{5}{3}\log|y-2|\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\log(\sqrt{3}+1) - 5\log(\sqrt{3}+2) + \frac{5}{3}\log(2-\sqrt{3}) - 0 - 0 + 5\log 2 - \frac{5}{3}\log 2 \\
&= 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\log(\sqrt{3}+1) - 5\log(\sqrt{3}+2) + \frac{5}{3}\log(2-\sqrt{3}) + \frac{10}{3}\log 2\,.
\end{aligned}$$

$\triangle$