Příklady na 1. bonusové cvičení

Příklad. (Derivace - jednodušší) Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sin|x^2+y^2-1|.$$

Spočítejte její parciální derivace podle x i y všude, kde existují. Nakonec najděte rovnici tečné roviny v bodě $\boldsymbol{a} = [\pi, 1]$.

Řešení.
Definičním oborem je celá rovina. Standardně obdržíme (s využitím symetrie)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\cdot \operatorname{sign}(x^2+y^2-1)\cos|x^2+y^2-1|\,, x^2+y^2\neq 1,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y\cdot \operatorname{sign}(x^2+y^2-1)\cos|x^2+y^2-1|\,, x^2+y^2\neq 1.\end{aligned}$$

Buď nyní $[x,y]\in\mathbb{R}^2$ splňující $x^2+y^2=1$, chceme spočítat $f_x(x,y)$.

Pomocí spojitosti. Jelikož je f spojitá dokonce na celém definičním oboru, a derivaci mimo vynechanou kružnici máme spočtenou, tak použijeme větu o výpočtu derivace pomocí limity derivací. Počítejme tedy

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x+t,y) &= \lim_{t\to 0} 2(x+t)\cdot\operatorname{sign}\,(x+t)^2+y^2-1)\cos|(x+t)^2+y^2-1|\\ &= \lim_{t\to 0} 2(x+t)\cdot\operatorname{sign}(x^2+2xt+t^2+y^2-1)\cos|x^2+2xt+t^2+y^2-1|\\ &= \lim_{t\to 0} 2(x+t)\cdot\operatorname{sign}(2xt+t^2)\cos|2xt+t^2|\\ &\overset{AL}{=} 2\lim_{t\to 0}(x+t)\cdot\operatorname{sign}(2xt+t^2).\end{aligned}$$

Je-li $x=0$ (a $y=\pm 1$), tak

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x+t,y) = 2\lim_{t\to 0} t\cdot\operatorname{sign} t^2 = 2\lim_{t\to 0} t = 0.$$

Jelikož limity zprava i zleva existují a rovnají se, tak nám věta říká, že $f_x(0,\pm 1) = 0$. Díky symetrii funkce f víme, že $f_y(\pm 1, 0) = 0$.

Je-li $x\neq 0$, tak se dá ještě jednou použít aritmetika limit, tj.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x+t,y) \overset{AL}{=} 2x\lim_{t\to 0}\operatorname{sign}(t(2x+t)).$$

Uvědomme si, že nás zajímají pouze malé (v absolutní hodnotě) hodnoty t, a jelikož $x\neq 0$, tak je znaménko $x+t$ určeno znaménkem čísla x, tj.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x+t,y) = 2x\lim_{t\to 0}\operatorname{sign}(2tx).$$

Nyní tedy vidíme, že limita zprava i zleva existuje, ale nerovná se. Věta nám v tomto případě říká, že derivace $f_x(x,y)$ neexistuje. Ze symetrie funkce f neexistuje ani derivace $f_y(x,y)$ (až na případ, který jsme výše spočetli).

Pomocí definice. Můžeme přímočaře použít definici, tj.

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sin|(x+h)^2+y^2-1|\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sin|x^2+2xh+h^2+y^2-1| = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sin|2xh+h^2|\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{\sin|2xh+h^2|}{|2xh+h^2|}\cdot|2xh+h^2| \overset{AL}{=} \lim_{h\to 0}\frac{|h|\cdot|2x+h|}{h},\end{aligned}$$

použili jsme známou limitu pro funkci $\sin x$. Nyní rozlišíme dvě situace. Je-li $x=0$, tak máme

$$f_x(0,\pm 1) = \lim_{h\to 0}\frac{|h|^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0.$$

Ze symetrie získáme, že opět je $f_x(\pm 1, 0) = 0$. Je-li $x \neq 0$, tak můžeme použít aritmetiku limit a získat

$$f_x(x, y) \overset{AL}{=} 2|x| \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Tato limita ale neexistuje, protože limity zprava a zleva existují, ale nerovnají se. Ze symetrie získáváme opět analogický závěr pro derivaci podle y.

Alespoň na nějakém okolí bodu $[\pi, 1]$ jsou parciální derivace spojité, pro tečnou rovinu dostaneme $T(x, y) = \sin \pi^2 + 2\pi(x - \pi) \cos \pi^2 + 2(y - 1) \cos \pi^2$.

△

Příklad. (Derivace - složitější) Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \log \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{|y| + \sqrt[3]{x}}.$$

Spočítejte její parciální derivace podle x i y všude, kde existují. Nakonec najděte rovnici tečné roviny v bodě $\boldsymbol{a} = [-1, 3]$.

Řešení.

Zlomek v logaritmu musí být kladný, z toho vyplynou dva podpřípady. Jeden z nich nenastává nikdy a z druhého vyplyne, že definiční obor je množina mezi nalevo od svislé přímky $x = 1$ a napravo od $y = \pm \sqrt[3]{x}$, přesněji

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in (0, 1) \vee (0 \geq x \wedge y \in (-\infty, \sqrt[3]{x}) \cup (-\sqrt[3]{x}, +\infty))\}.$$

Pro derivace snadno získáme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{-|y| - 1}{3\sqrt[3]{x^2}(1 - \sqrt[3]{x})(|y| + \sqrt[3]{x})}, [x, y] \in D_f,\ x \neq 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-\operatorname{sign} y}{|y| + \sqrt[3]{x}}, [x, y] \in D_f,\ y \neq 0.
\end{aligned}$$

Derivace ve vynechaných bodech spočteme pomocí věty o výpočtu derivace pomocí limity derivací (vidíme, že je f dokonce spojitá na celém definičním oboru). Buď tedy $y \neq 0$, chtěli bychom určit $f_x(0, y)$. Počítejme

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0 + t, y) &= \lim_{t \to 0} \frac{-|y| - 1}{3\sqrt[3]{t^2}(1 - \sqrt[3]{t})(|y| + \sqrt[3]{t})} \\
&\overset{AL}{=} \frac{-|y| - 1}{3|y|} \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} = -\infty,
\end{aligned}$$

dosadili jsme, potom jsme použili spojitost odmocnin a provedli jsme limitní přechod v několika výrazech (díky tomu, že $y \neq 0$). Jelikož nám vyšla limita zleva i zprava stejná, ale nevlastní, tak podle zmíněné věty $f_x(0, y)$, pro $y \neq 0$, neexistuje. Nyní si zafixujeme bod $[x, 0]$ pro $x \in (0, 1)$ a chceme určit $f_y(x, 0)$. Tentokrát počítáme snazší limitu (tentokrát v limitním přechodu použijeme, že $x \neq 0$)

$$\lim_{t \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0 + t) = \lim_{t \to 0} \frac{-\operatorname{sign} t}{|t| + \sqrt[3]{x}} \overset{AL}{=} -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \lim_{t \to 0} \operatorname{sign} t,$$

a tedy limita zprava i zleva existuje, ale nerovnají se. Věta o výpočtu derivace pomocí limity nám dává, že $f_y(x, 0)$ také neexistují.

Alespoň na nějakém okolí bodu $[-1, 3]$ jsou parciální derivace spojité, pro tečnou rovinu dostaneme $T(x, y) = \frac{7}{6} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$.

△

Příklad. (Implicitní funkce - rovnice) Ukažte, že rovnice

$$\log \frac{\tan x + 2 \tan y}{3} + \log \frac{2 \tan x + \tan y}{3} = 0$$

určuje na jistém okolí bodu $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ implicitně zadanou funkci proměnné x. Spočtěte její první i druhou derivaci v bodě $\frac{\pi}{4}$ a napište rovnici tečné přímky v $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Řešení.
Označme
$$F(x,y) := \log \frac{\tan x + 2\tan y}{3} + \log \frac{2\tan x + \tan y}{3},$$
vidíme, že tato funkce je dobře definovaná na nějakém okolí $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, plyne to z toho, že $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ a tan je spojitá funkce (stačí vzít např. $B(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \frac{\pi}{4})$). Jelikož dává rovnice smysl, tak ji můžeme zjednodušit, $F(x,y) = 0$ je totiž ekvivalentní rovnostem
$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{\tan x + 2\tan y}{3} \cdot \frac{2\tan x + \tan y}{3}\right) &= 0\\
\frac{\tan x + 2\tan y}{3} \cdot \frac{2\tan x + \tan y}{3} &= 1\\
(\tan x + 2\tan y)(2\tan x + \tan y) &= 9\\
2\tan^2 x + 5\tan x \cdot \tan y + 2\tan^2 y &= 9.
\end{aligned}$$
Budu tedy pracovat s funkcí
$$G(x,y) := 2\tan^2 x + 5\tan x \cdot \tan y + 2\tan^2 y - 9,$$
ta je tedy třídy C^1 např. na $B(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \frac{\pi}{4})$ a evidentně máme $G(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = 0$. Teď si spočteme všechny druhé (ze zadání vidíme, že budou potřeba) derivace funkce G:
$$\begin{aligned}
G_x &= 4\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{5}{\cos^2 x} \cdot \tan y,\\
G_y &= 4\tan y \cdot \frac{1}{\cos^2 y} + \frac{5}{\cos^2 y} \cdot \tan x,\\
G_{xx} &= \frac{4}{\cos^4 x} + \frac{(-2)\cdot(-\sin x)}{\cos^3 x}(4\tan x + 5\tan y),\\
G_{yy} &= \frac{4}{\cos^4 y} + \frac{(-2)\cdot(-\sin y)}{\cos^3 y}(4\tan y + 5\tan x),\\
G_{xy} &= \frac{5}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} = G_{yx}.
\end{aligned}$$
Využili jsme faktu, že G je diferencovatelná, má proto záměnné smíšené parciální derivace druhého řádu. Poznamenejme, že výpočet se zrychlí, když si uvědomíme, že G je symetrická ve svých proměnných. Ještě se podíváme na hodnoty v našem bodě:
$$\begin{aligned}
G_x\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{4}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{5}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 8 + 10 = 18,\\
G_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{4}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{5}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 8 + 10 = 18,\\
G_{xx}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{4}{\cos^4 \frac{\pi}{4}} + \frac{2\sin \frac{\pi}{4}}{\cos^3 \frac{\pi}{4}}(4+5) = 16 + 4\cdot 9 = 52,\\
G_{yy}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{4}{\cos^4 \frac{\pi}{4}} + \frac{2\sin \frac{\pi}{4}}{\cos^3 \frac{\pi}{4}}(4+5) = 16 + 4\cdot 9 = 52,\\
G_{xy}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{5}{\cos^2 \frac{\pi}{4} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4}} = 20 = G_{yx}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$
Jelikož $G_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$, tak (spolu s už ověřenými předpoklady) lze použít větu o implicitní funkci. Zaručuje nám existenci U okolí $\frac{\pi}{4}$ a V okolí $\frac{\pi}{4}$ takových, že pro každé $x \in U$ existuje jediné $y \in V$ splňující $G(x,y) = 0$ a $y = \varphi(x)$ pro $x \in U$. Navíc $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ a φ je na U dvakrát diferencovatelné (jelikož i G je, jak vidíme nahoře). Pomocí řetízkového pravidla můžeme na U derivovat:
$$\begin{aligned}
G(x, \varphi(x)) &= 0,\\
G_x + G_y\varphi'(x) &= 0,\\
G_{xx} + G_{xy}\varphi'(x) + G_{yx}\varphi'(x) + G_{yy}(\varphi'(x))^2 + G_y\varphi''(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Dosadíme náš bod:

$$\begin{aligned}18+18\varphi'(x)&=0,\\52+20\varphi'(x)+20\varphi'(x)+52(\varphi'(x))^2+18\varphi''(x)&=0.\end{aligned}$$

Z první rovnice ihned máme, že $\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$ a dosazením do druhé je $12+52+18\varphi''\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, a tedy $\varphi''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{32}{9}$. Nakonec, protože je φ diferencovatelná na nějakém okolí $\frac{\pi}{4}$, tak umíme spočítat rovnici tečné přímky v tomto bodě jako $y=\frac{\pi}{4}-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-x$.

$\triangle$

Příklad. (Implicitní funkce - soustava) Ukažte, že systém

$$\begin{aligned}6xyu-3v&=4xu^2v-yu\\8x^2yv-6yu^2&=2xyuv\end{aligned}$$

určuje na okolí bodu bodu $[1,1,1,1]$ jednoznačně určené implicitní funkce proměnných y a u. Najděte tečnou rovinu k funkci $v(y,u)$ v bodě $[1,1,1]$.

Řešení.

Označme

$$F:=6xyu-3v-4xu^2v+yu \text{ a } G:=8x^2yv-6yu^2-2xyuv,$$

ihned vidíme, že $F(1,1,1,1)=0=G(1,1,1,1)$ a $F,G\in C^\infty(\mathbb{R}^4)$. Teď si spočteme derivace

$$\begin{aligned}F_x&=6yu-4u^2v \implies F_x(1,1,1,1)=2,\\F_y&=6xu+u \implies F_y(1,1,1,1)=7,\\F_u&=6xy-8xuv+y \implies F_u(1,1,1,1)=-1,\\F_v&=-3-4xu^2 \implies F_v(1,1,1,1)=-7,\\G_x&=16xyv-2yuv \implies G_x(1,1,1,1)=14,\\G_y&=8x^2v-6u^2-2xuv \implies G_y(1,1,1,1)=0,\\G_u&=-12yu-2xyv \implies G_u(1,1,1,1)=-14,\\G_v&=8x^2y-2xyu \implies G_v(1,1,1,1)=6.\end{aligned}$$

V bodě $[1,1,1,1]$ tedy je

$$F_x^1\cdot F_v^2-F_v^1\cdot F_x^2=2\cdot 6-(-7)\cdot 14=110\neq 0,$$

a proto existuje U okolí $[1,1]$ a V okolí $[1,1]$ takové, že pro každé $[y,u]\in U$ existuje jediné $[x,v]\in V$ splňující rovnosti $F(x,y,u,v)=0=G(x,y,u,v)$ a navíc jsou $\varphi(y,u)=x$, $\psi(y,u)=v$ diferencovatelné na U. Speciálně máme, že $\varphi(1,1)=1$ a $\psi(1,1)=1$. Zde platí

$$\begin{aligned}F(\varphi(y,u),y,u,\psi(y,u))&=0,\\G(\varphi(y,u),y,u,\psi(y,u))&=0.\end{aligned}$$

Oba vztahy zderivujeme podle y a i dle u:

$$\begin{aligned}F_x\varphi_y+F_y+F_v\psi_y&=0,\\G_x\varphi_y+G_y+G_v\psi_y&=0,\\F_x\varphi_u+F_u+F_v\psi_u&=0,\\G_x\varphi_u+G_u+G_v\psi_u&=0.\end{aligned}$$

Dosadíme spočtené hodnoty v bodě $[1,1,1,1]$:

$$\begin{aligned}2\varphi_y+7-7\psi_y&=0,\\14\varphi_y+6\psi_y&=0,\\2\varphi_u-1-7\psi_u&=0,\\14\varphi_u-14+6\psi_u&=0.\end{aligned}$$

To je vlastně jeden pár soustav o dvou rovnicích, v obou případech vezmeme -7 násobek prvního řádku a přičteme k druhému, tj.

$$\begin{aligned} -49 + 49\psi_y(1,1) + 6\psi_y(1,1) &= 0, \\ 7 - 14 + 49\psi_u(1,1) + 6\psi_u(1,1) &= 0. \end{aligned}$$

Z toho okamžitě získáváme

$$\psi_y(1,1) = \frac{49}{55} \quad \text{a} \quad \psi_u(1,1) = \frac{7}{55}.$$

Nakonec, díky diferencovatelnosti ψ na okolí bodu $[1,1]$ můžeme rovnou zapsat rovnici tečné roviny jako $T(y,u) = 1 + \frac{49}{55}(y-1) + \frac{7}{55}(u-1)$.

$\triangle$