VIII. Funkce více proměnných - Parciální derivace

Shrnutí teorie.

U funkcí více proměnných máme také pojem limity, ale ve výpočtech je nebudeme potřebovat. Důvodem je, že parciální derivace funguje v rámci úsečky v daném směru. U obecné limity by byla potíž v tom, že musíme kontrolovat chování ze všech směrů (ne jen zleva/zprava).

Pozn (Spojitost)**.** *Konstantní násobek spojité funkce je spojitá funkce. Součet a součin spojitých funkcí je spojitá funkce. Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.*

Definice. (Parciální derivace) Buď $k \in \{1, \dots, n\}$ a funkce f definovaná na nějaké úsečce se středem $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\boldsymbol{e}^k$. Parciální derivací f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle k-té proměnné rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^k) - f(\boldsymbol{a})}{t} .$$

Je-li f definovaná na nějaké neprázdné a otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ a má na G všechny své parciální derivace spojité, pak říkáme, že $f \in C^1(G)$ (je třídy C^1 na G).

Definice vlastně říká, že pro derivování $f(x, y)$ podle y v nějakém bodě nás zajímá, jak se mění hodnoty funkce na (dost krátké) svislé úsečce procházející tímto bodem. Tento bod musí být "uvnitř" této úsečky (limita je totiž oboustranná). Pro derivaci dle x nás pochopitelně zajímá vodorovná úsečka.

Dává to návod na výpočet. Derivace podle y totiž vlastně ignoruje dění v x-ovém směru. Lze si tedy představit, že provádíme standardní derivaci funkce jedné proměnné (přičemž x je konstantní a neovlivněné limitěním). Pro tuto derivaci máme z minulého semestru řadu vlastností a ty se tedy dědí i pro parciální derivaci.

Pozn. *Buď f v bodě $\boldsymbol{a}$ "spojitá podél k-tého směru", tj. funkce $t \mapsto f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^k)$ je spojitá v nule, a nechť platí, že*

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^k) = A \ \text{ a } \lim_{t \to 0_-} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^k) = B.$$

Je-li $A \neq B$ či $A = B = \pm\infty$, tak $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a})$ neexistuje. Je-li $A = B \in \mathbb{R}$, tak $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) = A$.

Obvykle spočteme parciální derivaci zadané funkce aplikací derivací součtu, součinu a složení ve většině zkoumaných bodů. Ty body které ze vzorce nepodchytíme musíme vyřešit separátně s využitím buďto definice, či poznámky výše (je třeba komentovat spojitost). To je opět analogický postup jako v minulém semestru u "obyčejných" derivací.

Pozn. *Je-li $f(x, y) = f(y, x)$, pak $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$, pokud alespoň jedna z nich existuje. Stačí tedy spočítat jen jednu derivaci a druhou máme ze symetrie funkce f.*

Definice. (Tečná nadrovina a gradient) Buď $\emptyset \neq G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $f \in C^1(G)$. Uvažujme $\boldsymbol{a} \in G$, pak graf funkce

$$T(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a})(x_k - a_k), \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

nazýváme *tečnou nadrovinou* ke grafu funkce f v bodě $[\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})]$.

Gradientem funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ rozumíme vektor

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right].$$

Pozn. *V případě $n = 1$ jsme již viděli rovnici tečny ke grafu funkce v daném bodě. Gradient by se redukoval do obyčejné derivace (dle jediné proměnné).*

Obecně gradient v daném bodě zachycuje ve kterém směru a jak moc se daná veličina mění. Např. f může reprezentovat teplotu či nadmořskou výšku závisející na souřadnicích v prostoru.

Tečná nadrovina se dá reprezentovat pomocí sk. s.: $T(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$.

Příklad 1. Určete a nakreslete definiční obor a vrstevnice dané funkce, nakonec určete, kde je spojitá.

(a) $f(x,y) = 2x + 3y + 1$.
(b) $f(x,y) = \min(x,y)$.
(c) $f(x,y) = x + \sqrt{y}$.
(d) $f(x,y) = \frac{y}{x}$.
(e) $f(x,y) = x^2 + y^2$.
(f) $f(x,y) = x^2 - y^2$.
(g) $f(x,y) = \sqrt{xy}$.
(h) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
(i) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.
(j) $f(x,y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$.
(k) $f(x,y) = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$.
(l) $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.
(m) $f(x,y) = \operatorname{sign}\,(\sin x \cdot \sin y)$.
(n) $f(x,y) = |x| + y$.

Pozn. *Vrstevnicí $f(x,y)$ ve výšce $c \in \mathbb{R}$ rozumíme množinu $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2; f(x,y) = c\}$.*

Příklad 2. Spočtěte parciální derivace funkce všude, kde existují.

(a) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$.
(b) $f(x,y) = 35x - 4y^5 + 3x^2y$.
(c) $f(x,y) = \frac{\sin y^2}{x}$.
(d) $f(x,y) = e^{xy} + \sin(x + y)$.
(e) $f(x,y) = xy \tan \frac{x}{y}$.
(f) $f(x,y,z) = xyz + x \log z + yz^2$.
(g) $f(x,y) = x^y$.
(h) $f(x,y) = \frac{1}{2} \log \frac{x+y}{x-y}$.
(i) $f(x,y) = \operatorname{arccotg} \frac{x+y}{x-y}$.
(j) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
(k) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.
(l) $f(x,y) = \sqrt[3]{x + y^2}$.
(m) $f(x,y) = |x| \cdot y$.
(n) $f(x,y) = |x| \cdot |y|$.
(o) $f(x,y) = |y - x^3|$.
(p) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.
(q) $f(x,y) = |y - \sin x|$.
(r) $f(x,y) = |\sin y - \sin x|$.
(s) $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.
(t) $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$.
(u) $f(x,y) = \max\{y - x^3, 0\}$.
(v) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + y} \cdot \log(x^2 + y^2) & , [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & , [x,y] = [0,0] \end{cases}$.
(w) $f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2+xy+y^2}\right) & , [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & , [x,y] = [0,0] \end{cases}$.

Příklad 3. Načrtněte definiční obor a spočtěte parciální derivace funkce všude, kde existují. Případně ještě najděte rovnici tečné roviny v předepsaném bodě $\boldsymbol{a}$.

(a) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, $\boldsymbol{a} = [1, -2]$.
(b) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - \arcsin x}$, $\boldsymbol{a} = [0, 1]$.
(c) $f(x,y) = \log(e^3 - e^{|x|+2|y|})$, $\boldsymbol{a} = [1, \frac{1}{2}]$.
(d) $f(x,y) = \arccos(x - \cos y)$, $\boldsymbol{a} = [1, 0]$.
(e) $f(x,y) = \log \frac{1-\sqrt[3]{x}}{|y|+\sqrt[3]{x}}$, $\boldsymbol{a} = [-1, 3]$.
(f) $f(x,y) = \arcsin \frac{x+y}{x^2+x+1}$, $\boldsymbol{a} = [1, -1]$.
(g) $f(x,y) = \sqrt{\frac{y-\sin x}{y}}$, $\boldsymbol{a} = [0, 5]$.
(h) $f(x,y) = \sqrt{y^6 - x^3}$, $\boldsymbol{a} = [0, 2]$.
(i) $f(x,y) = \max\{y - \cos x, 0\}$, $\boldsymbol{a} = [0, \pi]$.
(j) $f(x,y) = \max\{y + x, x^3\}$.
(k) $f(x,y) = (3x + y)^{|2x-3y|}$.
(l) $f(x,y) = (x - 2y)^{|2x-y|}$.
(m) $f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{|x|-|y|}}$.
(n) $f(x,y) = e^{\sqrt{x+1}} \sqrt{x + y^2}$.
(o) $f(x,y) = \sin |x^2 + y^2 - 1|$.
(p) $f(x,y) = \sin \sqrt[3]{x^2 + y^2 - 1}$.
(q) $f(x,y) = \sqrt{|x| + |y| - 1}$.

Výsledky - IX. Funkce více proměnných - Parciální derivace

Příklad 1.

(a) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou rovnoběžné přímky. Funkce je spojitá na D_f.

(b) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou ramena úhlů, která jsou rovnoběžná s osami x a y. Funkce je spojitá na D_f.

(c) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$. Vrstevnice jsou poloviny parabol, posouvající se po ose x. Funkce je spojitá na D_f.

(d) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$. Vrstevnice jsou přímky procházející počátkem. Funkce je spojitá na D_f.

(e) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou kružnice se středem v počátku. Funkce je spojitá na D_f.

(f) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou hyperboly, tj. $y = \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R}$.

(g) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)\}$. Vrstevnice jsou hyperboly tvaru $y = \frac{c}{x}, c > 0$ a obě osy. Funkce je spojitá na D_f.

(h) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Vrstevnice jsou kružnice se středem v počátku a poloměrem nejvýše 1. Funkce je spojitá na D_f.

(i) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 1\}$. Vrstevnice jsou kružnice se středem v počátku a poloměrem větším než 1. Funkce je spojitá na D_f.

(j) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Vrstevnice jsou dvojice kružnic, v jednom případě kružnice. Funkce je spojitá na D_f.

(k) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; -x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\}$. Vrstevnice jsou dvojice parabol, v jednom případě parabola. Funkce je spojitá na D_f.

(l) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 2k\pi x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}_0\}$. Vrstevnice jsou posloupnosti kružnic. Funkce je spojitá na D_f.

(m) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou tři: Pro $c = 0$ jde o přímky $x = k\pi$ a $y = pi, k \in \mathbb{Z}$. Pro $c = -1$ jde o množinu $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \in (-\pi + 2k\pi, 2k\pi), y \in (2l\pi, \pi + 2l\pi), k, l \in \mathbb{Z}\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi), y \in (-\pi + 2l\pi, 2l\pi), k, l \in \mathbb{Z}\}$. Pro $c = 1$ jde o zbytek $\mathbb{R}^2$. Pro ostatní c žádné vrstevnice nejsou. Funkce je spojitá na každé množině odpovídající vrstevnici pro $c = \pm 1$, jinde není.

(n) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou grafy funkcí $y = c - |x|, c \in \mathbb{R}$. Funkce je spojitá na D_f.

Příklad 2.

(a) $f'_x(x,y,z) = y + z; f'_y(x,y,z) = x + z; f'_z(x,y,z) = x + y$ pro $[x,y] \in \mathbb{R}^3$.

(b) $f'_x(x,y) = 6xy + 35; f'_y(x,y) = -20y^4 + 3x^2$ pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2$.

(c) $f'_x(x,y) = -\frac{\sin y^2}{x^2}; f'_y(x,y) = \frac{2y \cos y^2}{x}$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$.

(d) $f'_x(x,y) = ye^{xy} + \cos(x+y); f'_y(x,y) = xe^{xy} + \cos(x+y)$ pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2$.

(e) $f'_x(x,y) = y \tan \frac{x}{y} + xy \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}; f'_y(x,y) = x \tan \frac{x}{y} + xy \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{-x}{y^2}$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(f) $f'_x(x,y,z) = yz + \log z; f'_y(x,y,z) = xz + z^2; f'_z(x,y,z) = xy + \frac{x}{z} + 2yz$ pro $[x,y,z] \in \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; z > 0\}$.

(g) $f'_x(x,y) = yx^{y-1}; f'_y(x,y) = x^y \log x$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$.

(h) $f'_x(x,y) = -\frac{y}{x^2-y^2}\ ; f'_y(x,y) = \frac{x}{x^2-y^2}$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; -x < y < x \vee x < y < -x\}$.

(i) $f'_x(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\ ; f'_y(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \neq y\}$.

(j) $f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ; f'_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus [0,0]$. V bodě $[0,0]$ neexistují obě parciální derivace.

(k) $f'_x(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}\ ; f'_y(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \neq -x\}$. V bodě $[0,0]$ jsou obě parciální derivace rovny 1. Zbylé parciální derivace neexistují.

(l) $f'_x(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+y^2)^2}}\ ; f'_y(x,y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x+y^2)^2}}$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \neq -y^2\}$. $f'_x(-y^2,y)$ neexistuje (vyjde $+\infty$), $f'_y(-y^2,y), y \neq 0$, neexistuje (vyjde $y \cdot \infty$), $f'_y(0,0)$ neexistuje (vyjde $\pm\infty$).

(m) $f'_x(x,y) = y \cdot \operatorname{sign} x$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$ a $f'_y(x,y) = |x|$ pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2$. Dále $f'_x(0,0) = 0$ a $f'_x(0,y), y \neq 0$, neexistuje.

(n) $f'_x(x,y) = |y| \cdot \operatorname{sign} x$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$ a $f'_y(x,y) = |x| \cdot \operatorname{sign} y$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$. Dále $f'_x(0,0) = 0 = f'_y(0,0)$ a zbylé derivace neexistují.

(o) $f'_x(x,y) = -3x^2 \operatorname{sign}(y - x^3)$; $f'_y(x,y) = \operatorname{sign}(y - x^3)$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \neq x^3\}$. $f'_x(0,0) = 0$ a ostatní parciální derivace neexistují (derivace podle x vyjdou $\pm 3x^2$ a podle y vyjdou ± 1).

(p) $f'_x(x,y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$ a $f'_y(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$. Dále $f'_x(0,0) = 0 = f'_y(0,0)$ a zbylé derivace neexistují.

(q) $f'_x(x,y) = -\operatorname{sign}(y - \sin x) \cdot \cos x$; $f'_y(x,y) = \operatorname{sign}(y - \sin x)$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \neq \sin x\}$. Derivace podle y ve vynechaných bodech neexistuje. Dále $f'_x(\frac{\pi}{2} + k\pi, (-1)^k) = 0, k \in \mathbb{Z}$, a ve zbylých bodech derivace neexistuje.

(r) $f'_x(x,y) = -\operatorname{sign}(\sin y - \sin x) \cdot \cos x$; $f'_y(x,y) = \operatorname{sign}(\sin y - \sin s) \cdot \cos y$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; \sin x \neq \sin y\}$. Dále $f'_x(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi) = 0 = f'_y(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi), k, l \in \mathbb{Z}$ a ve zbývajících bodech derivace neexistují.

(s) $f'_x(x,y,z) = \frac{z}{y}(\frac{x}{y})^{z-1}$; $f'_y(x,y,z) = -\frac{xz}{y^2}(\frac{x}{y})^{z-1}$; $f'_z(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \log \frac{x}{y}$ pro $[x,y,z] \in \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; xy > 0\}$.

(t) $f'_x(x,y,z) = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z} - 1}$; $f'_y(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}} \cdot \frac{\log x}{z}$; $f'_z(x,y,z) = -x^{\frac{y}{z}} \cdot \frac{y \log x}{z^2}$ pro $[x,y,z] \in \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x > 0, z \neq 0\}$.

(u) $f'_x(x,y) = -3x^2$ pro $y > x^2$ a 0 pro $y < x^2$; $f'_y(x,y) = 1$ pro $y > x^2$ a 0 pro $y < x^2$. V bodech $[x, x^3]$ vynechané derivace neexistují až na $f'_x(0,0) = 0$.

(v) $f'_x(x,y) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}} \log(x^2 + y^2) + 2x \frac{\sqrt[3]{x^2+y}}{x^2+y^2}$; $f'_y(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}} \log(x^2 + y^2) + 2y \frac{\sqrt[3]{x^2+y}}{x^2+y^2}$ pro $[x,y] \in \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y \neq -x^2\}$. V $(x, -x^2)$ neexistují parciální derivace pokud $x^2 + x^4 \neq 1$, pokud $x^2 + x^4 = 1$, jsou obě parciální derivace nulové.

(w) $f'_x(x,y) = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2}$, $f'_y(x,y) = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)^2}$ pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus [0,0]$; v bodě $[0,0]$ jsou obě parciální derivace nulové.

Příklad 3. (a) $D_f = \mathbb{R}^2$ a funkce je na něm spojitá. Pro $x, y \neq 0$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y \cdot \operatorname{sign}(xy)}{2\sqrt{|xy|}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x \cdot \operatorname{sign}(xy)}{2\sqrt{|xy|}} .$$

Dále $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Potom $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neexistuje pro $x \neq 0$. Analogicky $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neexistuje pro $y \neq 0$. Parciální derivace jsou spojité na nějakém okolí bodu $[1,-2]$, tečná rovina má tedy smysl a má rovnici $T(x,y) = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y+2)$.

(b) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \in [-1,0] \vee (x \in (0,1] \wedge y \in (-\infty, -\sqrt{\arcsin x}) \cup (\sqrt{\arcsin x}, +\infty))\}$, funkce je na něm spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-1}{2\sqrt{y^2 - \arcsin x}\sqrt{1-x^2}} \ , \ x \in (-1,1), y^2 > \arcsin x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{y^2 - \arcsin x}} \ , \ x \in [-1,1], y^2 > \arcsin x.$$

Parciální derivaci podle x nemá smysl počítat ve vynechaných bodech (definiční obor neobsahuje vodorovnou úsečku kolem nich), podobně parciální derivaci podle y nemá smysl počítat ve vynechaných bodech až na počátek. Zde dostaneme, že $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje. Obě derivace jsou spojité alespoň na nějakém okolí bodu $[0,1]$. Pro tečnou rovinu dostaneme $T(x,y) = y - \frac{x}{2}$.

(c) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; |x| + 2|y| < 3\}$ a funkce je zde spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot \operatorname{sign} x}{e^3 - e^{|x|+2|y|}}\ ,\ [x,y] \in D_f, x \neq 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot 2 \operatorname{sign} y}{e^3 - e^{|x|+2|y|}}\ ,\ [x,y] \in D_f, y \neq 0.$$

Dále derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \in (\frac{-3}{2}, \frac{3}{2})$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \in (-3,3)$ neexistují. Alespoň na nějakém okolí bodu $[1, \frac{1}{2}]$ jsou parciální derivace spojité. Pro tečnou rovinu dostaneme $T(x,y) = \log(e^3 - e^2) - \frac{1}{e-1}(x-1) - \frac{1}{e-1}(y - \frac{1}{2})$.

(d) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; -1 + \cos y \leq x \leq 1 + \cos y\}$ a f je zde spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (x - \cos y)^2}}\ , -1 + \cos y < x < 1 + \cos y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-\sin y}{\sqrt{1 - (x - \cos y)^2}}\ , -1 + \cos y < x < 1 + \cos y.$$

Parciální derivaci dle x nemá ve vynechaných bodech smysl počítat, neboť definiční obor neobsahuje vodorovnou úsečku kolem těchto bodů. Podobně nemá smysl počítat derivaci dle y (svislé úsečky) s výjimkou bodů $[0, k\pi], k \in \mathbb{Z}$. Zjistíme, že $\frac{\partial f}{\partial y}(0, k\pi)$ neexistuje. Alespoň na nějakém okolí bodu $[1, 0]$ jsou parciální derivace spojité, pro tečnou rovinu dostaneme $T(x,y) = \frac{\pi}{2} - (x - 1)$.

(e) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \in (0,1) \vee (0 \geq x \wedge y \in (-\infty, \sqrt[3]{x}) \cup (-\sqrt[3]{x}, +\infty))\}$ a f je zde spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-|y| - 1}{3\sqrt[3]{x^2}(1 - \sqrt[3]{x})(|y| + \sqrt[3]{x})}, [x,y] \in D_f, x \neq 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-\operatorname{sign} y}{|y| + \sqrt[3]{x}}, [x,y] \in D_f, y \neq 0.$$

Derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \in (0,1)$ neexistují. Alespoň na nějakém okolí bodu $[-1, 3]$ jsou parciální derivace spojité, pro tečnou rovinu dostaneme $T(x,y) = -\frac{1}{3}(x+1) - \frac{1}{2}(y - 3)$.

(f) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; -(x+1)^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$ a f je zde spojitá. Pro body $[x,y]$ splňující $-(x+1)^2 < y < x^2 + 1$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{x^2+x+1}\right)^2}} \cdot \frac{-x^2 + 1 - 2xy - y}{(x^2 + x + 1)^2}\ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{x^2+x+1}\right)^2}} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1}\ .$$

Derivaci podle y nemá ve vynechaných bodech smysl počítat, neboť definiční obor neobsahuje svislou úsečku kolem těchto bodů. Derivaci podle x má smysl počítat pouze v bodech $[0,1], [-1,0]$ (v ostatních chybí vodorovná úsečka). Derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0)$ neexistují. Díky spojitosti derivací na okolí bodu $[1,-1]$ můžeme najít tečnou rovinu a ta má tvar $T(x,y) = \frac{1}{3}(x + y)$.

(g) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; (y > 0 \wedge y \geq \sin x) \vee (y < 0 \wedge y \leq \sin x)\}$ a funkce je zde spojitá. Pro body $[x,y]$ splňující, že $y > 0$ a $y > \sin x$ či $y < 0$ a $y < \sin x$, dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\cos x}{2y}\sqrt{\frac{y}{y - \sin x}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\sin x}{y^2}\sqrt{\frac{y}{y - \sin x}}\ .$$

Derivaci podle proměnné x má smysl počítat pouze v bodech $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1]$ a $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1]$ pro $k \in \mathbb{Z}$. V ostatních bodech nemá smysl počítat derivaci ani podle x, ani podle y, protože definiční obor neobsahuje úsečky kolem těchto bodů. Dostaneme, že $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1)$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1)$ neexistují. Díky spojitosti parciálních derivací na okolí bodu $[0,5]$ má smysl zkoumat tečnou rovinu, její předpis je $T(x,y) = 1 - \frac{1}{10}x$.

(h) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \le y^2\}$ a f je zde spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{y^6 - x^3}}\ , x < y^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^5}{\sqrt{y^6 - x^3}}\ , x < y^2.$$

Z vynechaných bodů má smysl zkoumat pouze derivaci podle proměnné y v počátku, zbylé parciální derivace nemá smysl počítat, neboť funkce není definována na žádné úsečce příslušného směru. Vyjde $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Díky spojitosti parciálních derivací na okolí bodu $[0,2]$ má smysl zkoumat tečnou rovinu, vyjde $T(x,y) = 8 + 12(y-2)$.

(i) Definičním oborem je celá rovina a funkce je zde spojitá. Dostaneme $f'_x = \sin x, y > \cos x$ a 0 pro $y < \cos x$; $f'_y = 1, y > \cos x$ a 0 pro $y < \cos x$. V bodech $[k\pi, \cos k\pi], k \in \mathbb{Z}$ je $f'_x = 0$. V ostatních bodech parciální derivace neexistují. Díky spojitosti parciálních derivací na okolí bodu $[0,\pi]$ má smysl zkoumat tečnou rovinu, vyjde $T(x,y) = y - 1$.

(j) Definičním oborem je celá rovina a funkce je zde spojitá. Dostaneme $f'_x = 1, y > x^3 - x$ a $3x^2$ pro $y < x^3 - x$; $f'_y = 1, y > x^3 - x$ a 0 pro $y < x^3 - x$. Pro $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ existuje f'_x v bodě $[x, x^3 - x]$ a rovná se 1. Parciální derivace ve zbylých bodech neexistují.

(k) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y > -3x\}$ a funkce je zde spojitá. Pro $y \ne \frac{2}{3}x$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y)\left(\frac{3|2x-3y|}{3x+y} + 2\,\mathrm{sign}\,(2x-3y)\log(3x+y)\right) \quad \text{a}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)\left(\frac{|2x-3y|}{3x+y} - 3\,\mathrm{sign}\,(2x-3y)\log(3x+y)\right)\ .$$

V bodě $\left[\frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right]$ jsou obě parciální derivace nulové. Ve zbylých bodech parciální derivace neexistují.

(l) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x > 2y\}$ a funkce je zde spojitá. Pro $y \ne 2x$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y)\left(\frac{|2x-y|}{x-2y} + 2\,\mathrm{sign}\,(2x-y)\log(x-2y)\right) \quad \text{a}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)\left(-\frac{2|2x-y|}{x-2y} - \mathrm{sign}\,(2x-y)\log(x-2y)\right)\ .$$

V bodě $\left[-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right]$ jsou obě parciální derivace nulové. Ve zbylých bodech parciální derivace neexistují.

(m) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; (y \ge 0 \wedge |x| > |y|) \vee (y \le 0 \wedge |x| < |y|)\}$ a funkce je zde spojitá. Pro body $[x,y] \in D_f$ dostaneme, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{2}\mathrm{sign}\,(x)\sqrt{\frac{y}{(|x|-|y|)^3}}\ , x \ne 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{|x|}{2\sqrt{y(|x|-|y|)^3}}\ , y \ne 0.$$

V bodě $[0,y]$, pro $y < 0$, f'_x neexistuje. Ve zbylých bodech nemá smysl parciální derivace zkoumat.

(n) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \ge \max\{-1, -y^2\}\}$ a funkce je zde spojitá. Přímočaře získáme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+y^2}} + \frac{\sqrt{x+y^2}}{2\sqrt{x+1}}\right)\ , x > \max\{-1, -y^2\},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{\sqrt{x+1}}\frac{y}{\sqrt{x+y^2}}\ , x > \max\{-1,-y^2\} \vee (x = -1 \wedge |y| > 1)\ .$$

Spočteme, že $f'_y(0,0)$ neexistuje a parciální derivace ve zbylých bodech nemá smysl zkoumat.

(o) Definičním oborem je celá rovina a funkce je zde spojitá. Standardně obdržíme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cdot \operatorname{sign}(x^2 + y^2 - 1) \cos|x^2 + y^2 - 1|, x^2 + y^2 \neq 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \cdot \operatorname{sign}(x^2 + y^2 - 1) \cos|x^2 + y^2 - 1|, x^2 + y^2 \neq 1.$$

Lze spočíst, že $f'_x(0, \pm 1) = f'_y(\pm 1, 0) = 0$. Derivace ve zbylých bodech neexistují.

(p) Definičním oborem je celá rovina a funkce je zde spojitá. Standardně obdržíme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x \cdot \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2 - 1}}{3\sqrt[3]{(x^2 + y^2 - 1)^2}}, x^2 + y^2 \neq 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y \cdot \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2 - 1}}{3\sqrt[3]{(x^2 + y^2 - 1)^2}}, x^2 + y^2 \neq 1.$$

Parciální derivace v bodech splňujících $x^2 + y^2 = 1$ neexistují.

(q) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \geq 1\}$ a funkce je zde spojitá. Standardně obdržíme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\operatorname{sign} x}{2\sqrt{|x| + |y| - 1}}, |x| + |y| > 1 \wedge x \neq 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\operatorname{sign} y}{2\sqrt{|x| + |y| - 1}}, |x| + |y| > 1 \wedge y \neq 0.$$

Funkce $f'_x(0, y)$, $f'_y(x, 0)$ neexistují pro $|y| \geq 1$, $|x| \geq 1$. Derivace ve zbylých bodech nemá smysl zkoumat.