XI. Funkce více proměnných - Extrémy

Shrnutí teorie.

Tvrzení. (Kompakty, spojitost, extrémy) Buď $M \subset \mathbb{R}^n$ a $f : M \to \mathbb{R}$.

(a) Je-li f spojitá na celém $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$, pak jsou množiny $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; f(\boldsymbol{x}) \leq c\}, \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; f(\boldsymbol{x}) \geq c\}, \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; f(\boldsymbol{x}) = c\}$ uzavřené.

(b) Množina M je uzavřená a omezená právě tehdy, když je kompaktní.

(c) Je-li $\emptyset \neq M$ kompaktní a f je zde spojitá, pak už f na M nabývá svého maxima i minima.

(d) Předpokládejme, že M je otevřená a v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in M$ má f lokální extrém. Potom pro každé $k \in \{1, \ldots, n\}$ derivace $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0)$ buď neexistuje, nebo je rovna nule.

(e) Je-li f spojitá, potom je $\sup_M f = \sup_{\overline{M}} f$ a $\inf_M f = \inf_{\overline{M}} f$.

Pozn. *Měli bychom znát pojmy omezené a uzavřené množiny, (ostrých) lokálních maxim a minim, dále spojitost, parciální derivace a gradient. Bodům z otevřené množiny G ve kterých je gradient dané funkce f roven nule se říká stacionární či kritické body f.*

Tvrzení. (Lagrangeova věta o multiplikátoru) Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $f, g \in C^1(G)$. Označme $M = \{\boldsymbol{x} \in G; g(\boldsymbol{x}) = 0\}$ a předpokládejme, že $\boldsymbol{x}_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z podmínek:

(a) $\nabla g(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$.

(b) Existuje reálné číslo λ (multiplikátor) splňující

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) + \lambda \nabla g(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Pozn. *Funkce f a g známe, jejich gradienty je tedy snadné nalézt. Z podmínky (a) obvykle snadno vyjde pár bodů ve kterých může daná rovnost nastat. Podmínka (b) je těžší a obvykle z ní vytanou další potenciálně extremální body.*

Tvrzení. (Lagrangeova věta o dvou multiplikátorech) Buď $G \subset \mathbb{R}^n, n > 2$, otevřená množina a $f, g_1, g_2 \in C^1(G)$. Označme $M = \{\boldsymbol{x} \in G; g_1(\boldsymbol{x}) = g_2(\boldsymbol{x}) = 0\}$ a předpokládejme, že $\boldsymbol{x}_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z podmínek:

(a) Jeden z vektorů $\nabla g_1(\boldsymbol{x}_0), \nabla g_2(\boldsymbol{x}_0)$ je násobkem druhého.

(b) Existují reálná čísla λ_1, λ_2 (multiplikátory) splňující

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) + \lambda_1 \nabla g_1(\boldsymbol{x}_0) + \lambda_2 \nabla g_2(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Pozn (Kuchařka - kompaktní množina M)**.**

- *Ukážeme, že je M omezená a uzavřená, a tedy kompaktní.*
- *Je-li f na M spojitá, tak víme, že maximum i minimum existuje. Hledáme podezřelé body.*
- *Máme-li užitečný postřeh, použijeme ho (např. redukce počtu vazeb či zjednodušení f).*
- *Podíváme se na vnitřek M a najdeme body, kde je gradient f nulový, nebo neexistuje.*
- *Podíváme se na hranici M. Máme dvě možnosti.*
  - *Parametrizujeme ji (či její část) a zkoumáme zde úlohu s o jedna nižší dimenzí.*
  - *Použijeme Lagrangeovy multiplikátory (typicky pracné, ale vede k cíli).*
- *Mezi podezřelé body zahrneme krajní body hranice.*
- *Porovnáme funkční hodnoty všech podezřelých bodů a vybereme z nich maxima a minima.*

Příklad 1. [Řešitelné bez multiplikátorů] Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá.

(a) $f(x,y) = e^x$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.
(b) $f(x,y) = x$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \in \langle 0,2\rangle, y \in \langle 0,1\rangle, 2x + y \leq 2\}$.
(c) $f(x,y) = \sin x \cdot \sin y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x + y = \frac{\pi}{2}\}$.
(d) $f(x,y) = x^2 + y^2$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 = 1\}$.
(e) $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z$ a $M = \langle -1,1\rangle^3$.
(f) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, y \leq 3 - x\}$.
(g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ a $M = \mathbb{R}^3$.
(h) $f(x,y) = x + y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(i) $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + y^2 = 1\}$.
(j) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ a $M = \mathbb{R}^2$.
(k) $f(x,y) = (x+y)e^{-2x-3y}$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$.
(l) $f(x,y) = (x+y)e^{-2x-3y}$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$.
(m) $f(x,y) = (x^2 + 5y^2)e^{-(3x^2+y^2)}$ a $M = \mathbb{R}^2$.
(n) $f(x,y) = xy^6$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^6 + y^6 \leq 64, x \leq 1\}$.
(o) $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}, 0 < a, b$.
(p) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}, 0 < c < b < a$.

Příklad 2. [Na procvičení multiplikátorů] Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá.

(a) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
(b) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$.
(c) $f(x,y,z) = xyz$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
(d) $f(x,y,z) = xyz$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 0\}$.
(e) $f(x,y,z) = xyz$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$.
(f) $f(x,y,z) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x + y + z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$.
(g) $f(x,y,z) = xy^2z^3$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x + 2y + 3z = a, x > 0, y > 0\}, a > 0$.
(h) $f(x,y) = x + y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$.
(i) $f(x,y) = y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)\}$.
(j) $f(x,y) = y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2)^2 = axy\}, a > 0$.
(k) $f(x,y) = x^2 + y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y \geq 0\}$.
(l) $f(x,y,z) = 10z + x - y$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y \geq 0\}$.
(m) $f(x,y) = 4x + 3y - 4$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1\}$.
(n) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} = 1\}$.
(o) $f(x,y) = x^4y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^4 + y^4 \leq 16, x \geq -1\}$.
(p) $f(x,y) = 2x + 4y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
(q) $f(x,y,z) = xy + yz$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$.
(r) $f(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{4}{3}x^3$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$.
(s) $f(x,y,z) = (x^2 + xy + y^2)e^{-z^2}$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$.
(t) $f(x,y) = (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.
(u) $f(x,y,z) = z + e^{xy}$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2\}$.
(v) $f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = x\}$.
(w) $f(x,y) = \arctan x + \arctan y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Příklad 3. ["Aplikace"]

(a) Najděte nejkratší vzdálenost bodu $[1, 1, 1]$ od roviny $3x + y + z = 2$.

(b) Dřevěná bedna tvaru kvádru bez víka má objem $V > 0$. Jaké mají být její rozměry, chceme-li minimalizovat množství dřeva použitého na její výrobu?

(c) Určete rozměry kvádru tak, aby součet délek jeho hran byl 96 cm a jeho objem byl co možná největší.

(d) Rozložte kladné číslo na čtyři kladné sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

(e) Farmář a farmářka mají 100 m pletiva a rádi by oplotili pozemek pro ovce. Trvají na tom, že pozemek bude mít tvar obdélníku. Protože se nachází u řeky, stačí jej oplotit ze tří stran. Jaké bude zadání úlohy pomocí Lagrangeových multiplikátorů?

Příklad 4. [Zkouškové] Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá.

(a) $f(x, y, z) = 2x - y + z$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + (y+1)^2 + z^2 \leq 1\}$.

(b) $f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-3x^2-y^2}$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$.

(c) $f(x, y, z) = 2x + y + 3z$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x + y + z \geq 0\}$.

(d) $f(x, y, z) = y^2 + xz$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + z \geq 0\}$.

(e) $f(x, y, z) = x - y^2$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 5, (x + z)^2 + 2y^2 = 2\}$.

(f) $f(x, y, z) = x^2 + 5z^2 + 2y^2$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; (x-z)^2 + y^2 = 4, x - 7y - z + 2 \geq 0\}$.

(g) $f(x, y, z) = x - y^2 - 2z$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + 2y^2 \leq 2, (x - 2z)^2 + y^2 = 5\}$.

(h) $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 9x + 8y^2 + 9z = 9, x + y + z \leq \frac{5}{4}\}$.

(i) $f(x, y, z) = (x - z)y^2$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 2x^2 + y^2 + 2z^2 = 1, x + z \geq \frac{1}{2}\}$.

(j) $f(x, y, z) = x(y + z)$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

(k) $f(x, y) = x^2y$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y - 2x \leq 1, 2x + y \leq 4, x + 2y \geq 2\}$.

(l) $f(x, y, z) = 2x - y$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 2x^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$.

(m) $f(x, y, z) = e^{xyz}$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x - y + z > 0\}$.

(n) $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + 5x - 3y + y^2$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x - y \geq 0, x + y \leq 2, y \geq 0\}$.

(o) $f(x, y, z) = x + z$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + 2y^2 = 1, y^2 + 2z^2 < 4\}$.

Výsledky - XI. Funkce více proměnných - Extrémy

Příklad 1.

(a) Maximum hodnoty 1 v bodech $[\pm 1, 0]$ a minimum hodnoty $\frac{1}{e}$ v bodě $[-1, 0]$.

(b) Maximum hodnoty 1 v bodě $[1, 0]$ a minimum hodnoty 0 v bodech $[0, y], y \in \langle 0, 1 \rangle$.

(c) Maximum hodnoty $\frac{1}{2}$ v bodech $[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} - k\pi], k \in \mathbb{Z}$ a minimum hodnoty $-\frac{1}{2}$ v bodech $[\frac{3\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} - k\pi], k \in \mathbb{Z}$.

(d) Maximum hodnoty 1 v bodech $[\pm 1, 0]$ a minimum hodnoty $\frac{1}{4}$ v bodech $\left[0, \pm\frac{1}{2}\right]$.

(e) Maximum hodnoty 5 v bodech $[1, 1, 1], [1, -1, 1], [-1, 1, 1], [-1, -1, 1]$ a minimum hodnoty -1 v bodě $[0, 0, -1]$.

(f) Maximum hodnoty -1 v bodě $[0, 0]$ a minimum hodnoty -19 v bodě $[0, 3]$.

(g) Supremum neexistuje a minimum hodnoty -14 v bodě $[-1, -2, 3]$.

(h) Maximum hodnoty $\sqrt{2}$ v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a minimum hodnoty $-\sqrt{2}$ v bodě $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

(i) Maximum hodnoty $\frac{17}{4}$ v bodech $\left[\frac{3}{10}, \frac{4}{5}\right], \left[-\frac{3}{10}, -\frac{4}{5}\right]$ a minimum hodnoty -2 v bodech $\left[\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right], \left[-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

(j) Maximum hodnoty $\frac{1}{e}$ v bodech splňujících $x^2 + y^2 = 1$ a minimum hodnoty 0 v bodě $[0, 0]$.

(k) Maximum hodnoty $\frac{1}{2e}$ v bodě $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$ a minimum hodnoty 0 v bodě $[0, 0]$.

(l) Supremum hodnoty $\frac{1}{2e}$ a infimum hodnoty 0. Maxima ani minima se nenabývá.

(m) Maximum hodnoty $\frac{5}{e}$ v bodech $[0, \pm 1]$ a minimum hodnoty 0 v bodě $[0, 0]$.

(n) Maximum hodnoty 63 v bodech $[1, \pm\sqrt[6]{63}]$ a minimum hodnoty $-\frac{12 \cdot 64}{7\sqrt[6]{7}}$ v bodech $\left[-\frac{2}{\sqrt[6]{7}}, \pm 2\frac{\sqrt[6]{6}}{\sqrt[6]{7}}\right]$.

(o) Maximum hodnoty $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $\left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$ a minimum hodnoty $-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $\left[-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$.

(p) Maximum hodnoty a^2 v bodech $[\pm a, 0, 0]$ a minimum hodnoty 0 v bodě $[0, 0, 0]$.

Příklad 2.

(a) Maximum je v $[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ a minimum v $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$.

(b) Maximum je v $[\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}]$ a minimum v $[-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}}]$.

(c) Maximum je v $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}], [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}]$ a minimum v $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}], [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}]$.

(d) Maximum je v $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ a minimum v $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}], [\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}]$.

(e) Maximum je v $[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}], [-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}], [-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}]$ a minimum v $[-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}], [\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}], [\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}]$.

(f) Maximum v $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ a minima se nenabývá.

(g) Maximum v $[\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}]$ a minima se nenabývá.

(h) Maximum v $[1, 1]$ a minimum v $[0, 0]$.

(i) Maximum v $[\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ a minimum v $[\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}]$.

(j) Maximum je v $[\frac{1}{4}\sqrt{a}\sqrt[4]{15}, \frac{1}{4}\sqrt{a}\sqrt[4]{15^3}]$ a minimum v $[-\frac{1}{4}\sqrt{a}\sqrt[4]{15}, -\frac{1}{4}\sqrt{a}\sqrt[4]{15^3}]$.

(k) Maximum je v $[\pm\sqrt{\frac{7}{3}\sqrt{\frac{5}{12}}}, \sqrt{\frac{5}{12}}]$ a minimum v $[0, 0]$.

(l) Maximum je v $[\frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{10}{\sqrt{102}}]$ a minimum v $[-\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{10}{\sqrt{102}}]$.

(m) Maximum je v $[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$ a minimum v $[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$.

(n) Maximum je v $[\frac{\sqrt{5}}{2}, 2\sqrt{5}]$ a minimum v $[-\frac{\sqrt{5}}{2}, -2\sqrt{5}]$.

(o) Maximum v $[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}]$ a minimum v $[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}]$.

(p) Maximum v $[0, 1]$ a minimum v $[0, 0]$.

(q) Maximum v $[\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1\mp\sqrt{5}}{4}]$ a minimum v $[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

(r) Maximum v $[-\frac{1}{2}, 0]$ a minimum v $[-2, 0]$.

(s) Maximum v $[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$ a minimum v $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1], [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1]$.

(t) Maximum v $[0, \pm\frac{1}{2}]$ a minimum v $[0, 0]$.

(u) Maximum v $[\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ a minimum v $[\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

(v) Maximum v $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}]$ a minimum v $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0, -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}]$.

(w) Maximum v $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ a minimum v $[0, 0]$.

Příklad 3.

1. Vzdálenost je $\frac{3\sqrt{11}}{11}$ a nejbližší bod je $\left[\frac{2}{11}, \frac{8}{11}, \frac{8}{11}\right]$.
2. Podstava má hrany stejné délky a to $\sqrt[3]{2V}$, výška je $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.
3. Podstava má hrany stejné délky a to 8, výška je také 8.
4. Číslo je třeba rozložit na čtyři stejné sčítance.
5. Maximalizujte funkci $f(x, y) = xy$ vzhledem k množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 2x + y = 100\}$. Vazební funkce z naší věty tedy bude $g(x, y) = 2x + y - 100$.

Příklad 4. (a) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$ v bodě $\left[\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{20}}\right]$ a minima hodnoty $\frac{1-\sqrt{15}}{2}$ v bodě $\left[-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{20}}\right]$.

(b) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $\frac{3}{e}$ v bodě $[0, 1]$ a minima hodnoty 0 v bodě $[0, 0]$.

(c) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $2\sqrt{14}$ v bodě $\sqrt{\frac{2}{7}}\,[2, 1, 3]$ a minima hodnoty $-2\sqrt{2}$ v bodě $\sqrt{2}\,[0, 1, -1]$.

(d) Funkce f nenabývá maxima ani minima na množině M. Supremum funkce f na M je 1 a infimum je $-\frac{1}{2}$.

(e) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $\sqrt{5}$ v bodech $\left[\sqrt{5}, 0, \pm\sqrt{2} - \sqrt{5}\right]$ a minima hodnoty -3 v bodech $[-2, \pm 1, 2]$.

(f) Jelikož například $f(n + 2, 0, n) \overset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, tak f není na M shora omezená a tudíž neexistuje její supremum ani maximum. Minima na M hodnoty $\frac{10}{3}$ nabývá v bodech $\left[\pm\frac{5}{3}, 0, \mp\frac{1}{3}\right]$.

(g) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $\sqrt{5}$ v bodech $\left[x, 0, \frac{x-\sqrt{5}}{2}\right]$, pro všechna $x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$, a minima hodnoty -3 v bodech $[0, \pm 1, 1]$.

(h) Jelikož například $f(1 - \frac{8}{9}y^2, y, 0) \overset{y\to+\infty}{\to} +\infty$, tak f není na M shora omezená a tudíž neexistuje její supremum ani maximum. Minima na M hodnoty $\frac{441}{512}$ nabývá v bodech $\left[\frac{3}{16}, \pm\frac{3\sqrt{17}}{16}, \frac{9}{32}\right]$.

(i) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $\frac{1}{4}$ v bodech $\left[\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$ a minima hodnoty $-\frac{1}{4}$ v bodech $\left[0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right]$.

(j) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $\frac{1}{\sqrt{2}}$ v bodech $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right]$ a minima hodnoty $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ v bodech $\left[\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right]$.

(k) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $\frac{4^3}{3^3}$ v bodě $\frac{4}{3}[1, 1]$ a minima hodnoty 0 v bodě $[0, 1]$.

(l) Funkce f nenabývá maxima ani minima na množině M. Supremum funkce f na M je $\sqrt{2} + \sqrt{\frac{7}{2}}$ a infimum je $-\sqrt{2} - \sqrt{\frac{7}{2}}$.

(m) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty $e^{\frac{1}{3\sqrt{3}}}$ v bodech $\sqrt{\frac{1}{3}}[1,1,1]$, $\sqrt{\frac{1}{3}}[-1,-1,1]$, $\sqrt{\frac{1}{3}}[1,-1,-1]$ a minima hodnoty $e^{-\frac{1}{3\sqrt{3}}}$ v bodě $\sqrt{\frac{1}{3}}[1,-1,1]$.

(n) Funkce f nabývá na M maxima hodnoty 18 v bodě $[2,0]$ a minima hodnoty 0 v bodě $[0,0]$.

(o) Funkce f nenabývá maxima ani minima na množině M. Supremum funkce f na M je $\sqrt{2}+1$ a infimum je $-\sqrt{2}-1$.