Pozn. *(Oprava k Př. 2 (ii).)*
Řešili jsme funkci $f(x,y)=|xy|$. Měli jsme $D_f=\mathbb{R}^2$ a spočetli jsme, že pro $xy\neq 0$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\cdot sign(xy)\ \ a\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\cdot sign(xy).$$

Funkce je spojitá na definičním oboru a je symetrická. Můžeme se tedy dále soustředit na zkoumání derivace podle x ve vynechaných bodech (tj. bodech splňujících $xy=0$). Díky spojitosti bychom mohli zkusit počítat limitu

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x+t,y).$$

Pro $y\neq 0$ (a tj. $x=0$) je to v pořádku, dostaneme

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(0+t,y)=\lim_{t\to 0}y\cdot sign(ty)=y\lim_{t\to 0}sign(ty),$$

a tato limita vskutku neexistuje, protože limita zprava a zleva vyjde jinak. Tím pádem neexistuje ani zkoumaná derivace. Nicméně, pro $y=0$ tentýž postup nefunguje. Potíž je totiž v tom, že $\frac{\partial f}{\partial x}(x+t,0)$ nemáme spočtenou (ten výše spočtený vzorec nefunguje na ose x). Je tedy nutné postupovat z definice, tj. pro $x\in\mathbb{R}$ počítáme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,0)-f(x,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t}=0.$$

Díky symetrii dostaneme, že $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=0$ pro $y\in\mathbb{R}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$, $x\neq 0$, neexistují.

Stejná potíž vzniká v př. VIII(3a), nikde jinde asi ne. Podobný příklad je ještě třeba následující.

Uvažujme $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$. Zjevně $D_f=\mathbb{R}^2$ a f je zde spojitá. Pro $xy\neq 0$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y}{3\sqrt[3]{x^2y^2}}\ \ a\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x}{3\sqrt[3]{x^2y^2}}.$$

Zbývá vyšetřit derivace v bodech $[x,y]$ splňující $xy=0$. Jelikož je f symetrická, tak se soustřeďme třeba jen na derivaci podle y. Analogicky jako předtím bude nutné počítat $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)$, $y\in\mathbb{R}$, pomocí definice. Platí

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,y+t)-f(0,t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t}=0.$$

Zbývá nám vyšetřit $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x\neq 0$. Máme tedy dvě možnosti. První je pomocí limity derivací (jako na cvičení), tj.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)=\lim_{t\to 0}\frac{x}{3\sqrt[3]{x^2t^2}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{3}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}=+\infty\cdot sign\,x,$$

a derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x\neq 0$ tedy neexistuje (protože nevlastní derivace nepřipouštíme). Druhou variantou je použít definici derivace i zde, měli bychom

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x,t)-f(x,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{tx}}{t}=\sqrt[3]{x}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}=+\infty\cdot sign\,x.$$