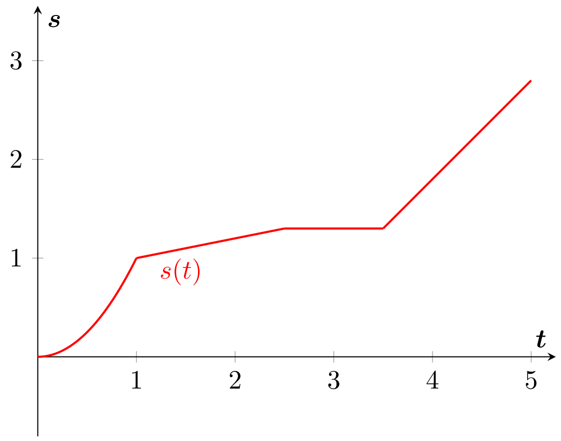
1 Co známe a co budeme zkoumat

1.1 První semestr

Dosud umíme pracovat s funkcemi jedné reálné proměnné. Dokážeme zjisti, kde je funkce definovaná a pomocí první derivace dokážeme vydedukovat, kde funkce roste či klesá. Spočtením limit v krajních bodech, spolu s vyšetřením lokálních a globálních extrémů, dokážeme určit její obor hodnot. Zajímá-li nás to, tak umíme pomocí druhé derivace vyšetřit, jakým způsobem je funkce křivá.

Hmatatelný příklad takové funkce vlastně všichni známe z fyziky. Jde např. o funkci $s(t)$, která v předepsaném čase $t \geq 0$ vrátí uraženou vzdálenost (např. nějakého hmotného bodu). Její průběh může vypadat třeba jako v grafu níže.



Vidíme, že někdy mezi časy $2,5$ a $3,5$ se uražená dráha nemění. Bod se tedy nepohyboval, změna (derivace) byla nulová. Pak jsou tam dva různé lineární úseky, dráha tedy narůstala (měnila se) konstantně. První úsek má parabolický profil, zpočátku tedy dráha narůstala pomalu a časem stále rychleji. Z toho si člověk může rychle uvědomit, že první derivace bude odpovídat funkci rychlosti, typicky značené jako $v(t)$. Vidíme i to, že nulovost derivace (tj. rychlosti) vůbec nemusí znamenat, že původní funkce má v tom bodě extrém – jde pouze o podezřelý bod. Druhá derivace dráhy, odpovídá změně rychlosti, ta se obvykle značí $a(t)$ a jmenuje se zrychlení. Tato funkce by byla v tomto příkladě nulová na posledních třech úsecích, na prvním je konstantní (x^2 má konstantní druhou derivaci).

1.2 Druhý semestr

Ve druhém semestru nás čekají čtyři témata. V rámci nich zobecníme, do jisté míry, předchozí úvahy ve dvou směrech.

Poslední, čtvrté, z nich navazuje na předchozí semestr takto. Máme-li funkci f, tak vlastně vždycky (úmorně, ale přece) dovedeme spočíst její derivaci f'. Dovedeme to i naopak? Tedy, když dostaneme funkci f dokážeme nějak zkonstruovat funkci, jejímž derivováním dostaneme f? Taková funkce se bude nazývat primitivní funkcí (či integrálem či "antiderivací") k f, za rozumných okolností bude existovat vždy, ale její nalezení je značně komplikovanější. V nějakých "netabulkových" příkladech i prakticky v ruce nemožné. V příkladu výše by tedy primitivní funkcí k $v(t)$ byla dráha $s(t)$. Graficky je integrál nějaké funkce úzce spjat s plochou, kterou vymezuje graf funkce a osa x.

První tři pro změnu budou pracovat ne s funkcí jedné reálné proměnné, ale s více proměnnými. Může se například jednat o proměnné x, y, z či x, y, z, t – druhá varianta může popisovat rychlost bodu ve třech prostorových rozměrech (což popíše třeba tok v trubici), první třeba distribuci teploty či elektrického náboje v místnosti.

Je asi zjevné, že kreslit takovéto vícedimenzionální průběhy funkce $f(x, y)$ by bylo krajně náročné, takže to dělat nebudeme. V prvé řadě potřebujeme nějak být schopni popsat, co to je "derivace" funkce f, abychom nějak zachytili míru změny. Ukazuje se, že nám v podstatě stačí být schopni sledovat změny ve jednotlivých směrech našich os x, y – půjde o tzv. parciální derivace. Jejich výpočet je v principu identický jako v 1. semestru (tím, že sledujeme pouze jeden směr, tak jsme vlastně v jednodimenzionální situaci). To bude tedy první téma, k němu přidáme i schopnost určit a představit si definiční obor funkce f, trochu se podíváme i na některé vlastnosti množin ve dvou a třech dimenzích.

Tohle se už úzce váže s vyšetřováním extrémů (a tím i oboru hodnot), což bude třetí téma. Toto téma se ukazuje jako potřebné i v ekonomické teorii – tzv. metoda Lagrangeových multiplikátorů. Mohlo by jít třeba o to, že máme k dispozici nějaký rozpočet a ten můžeme využít dvěma způsoby – investovat a něco vyrobit, z toho následně poplyne nějaký zisk, a nebo si zaplatit reklamu na ten produkt. Rozpočet nemůžeme překročit, takže budeme hledat pouze ta $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ splňující třeba $5x + 2y \leq 100$, kde x je množství vyrobených a prodaných produktů (5 je cena výroby jednoho kusu) a y je počet hodin, kde se reklama vysílá (2 je cena za jednu hodinu). Následně bychom museli vymyslet nějakou funkci, která nám řekne, co je náš profit, když vyrobíme x věcí za y času. Třeba $f(x, y) = 8x + x^2 - y^2$. I zde bude potřeba rozumět vlastnostem množin, protože některé abstraktní věty nám zaručí existenci extrémů, bude to tedy třeba umět ověřit.

Nakonec zbývající, druhé, téma zkoumá tzv. implicitní funkce. Zde jde o to, že z rovnice $x + y = 2$, dovedeme jednoznačně, explicitně, vyjádřit y jako funkci x, tj. $y(x) = 2 - x$. V případě $x^2 + y^2 = 1$, to už takto nejde, byly by potřeba dvě větve odmocniny, tj. $\pm\sqrt{1 - x^2}$. Jedná se o implicitní vztah. Budeme mít ale jakousi abstraktní větu, která nám řekne, že za jistých předpokladů lze z takového implicitního vztahu získat explicitní funkci $y(x)$. Takový vztah zjevně nemůže platit pro všechna uvažovaná x, ale pro x z nějakého rozumného okolí ano. Toto je následně i úzce spjato s otázkou existence inverzní funkce k $f(x, y)$.