X. Funkce více proměnných - Implicitní funkce

Shrnutí teorie.

Tvrzení. (O implicitní funkci) Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a bod $[\boldsymbol{x}_0, y_0] \in G$. Uvažujme funkci $F : G \to \mathbb{R}$ splňující:

(a) $F \in C^1(G)$,

(b) $F(\boldsymbol{x}_0, y_0) = 0$ a

(c) $\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0, y_0) \neq 0$.

Potom existuje U okolí bodu $\boldsymbol{x}_0$ (v $\mathbb{R}^n$) a okolí V bodu y_0 (v $\mathbb{R}$) taková, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje jediné $y \in V$ splňující $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$. Můžeme tedy reprezentovat $y = \varphi(\boldsymbol{x})$ pro nějako funkci $\varphi : U \to V$.

Navíc platí, že $\varphi \in C^1(U)$ a pro $i \in \{1, \ldots, n\}$ máme vzorec

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}))}, \boldsymbol{x} \in U.$$

Pozn. *Množina kořenů rovnice je tedy lokálně reprezentována grafem jisté funkce.*

Příklad (Kružnice): Uvažujme (implicitní) vztah $x^2 + y^2 = 1$. Chtěli bychom nějak vyjádřit y v závislosti na proměnné x. Zaveďme si proto funkci $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Ta je zjevně spojitá na celém $\mathbb{R}^2 =: G$. Podmínka (a) je tedy zadarmo, co podmínka (b)? Pro ni nás zajímá v jakých bodech $[x_0, y_0] \in G$ nastává $F(x_0, y_0) = 0$. To jsou právě ty body, které leží na jednotkové kružnici. Co poslední podmínka? Máme $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y = 0 \iff y = 0$. Má smysl tedy uvažovat body $[x_0, y_0]$, které leží na jednotkové kružnici, ale ne na ose x (to vyřazuje právě dva body $[1, 0]$ a $[-1, 0]$). Pro ostatní body dostáváme existenci okolí U, V a funkci $\varphi(x) = y : U \to V$, která je třídy $C^1(U)$ (dokonce C^∞). Vezmeme-li např. $[x_0, y_0] = [0, 1]$, pak $1 = \varphi(0)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, \varphi(0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(0, \varphi(0))} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1)} = -\frac{2x|_{[0,1]}}{2y|_{[0,1]}} = -\frac{0}{2} = 0.$$

Ale dovedeme to i v obecném bodě $x \in U$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} = -\frac{2x|_{[x,\varphi(x)]}}{2y|_{[x,\varphi(x)]}} = -\frac{x}{\varphi(x)}\ .$$

Alternativně můžeme vzít (na okolí U platný) vztah

$$x^2 + (\varphi(x))^2 = 1$$

a derivovat dle proměnné x:

$$2x + 2\varphi(x) \cdot \varphi'(x) = 0 \implies \varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi(x)}\ .$$

Tvrzení. (O dvou implicitních funkcích) Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ a bod $[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0] \in G$. Uvažujme dvě funkce $F_1, F_2 : G \to \mathbb{R}$ splňující pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$:

(a) $F_1, F_2 \in C^k(G)$,

(b) $F_1(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = 0$, $F_2(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = 0$ a

(c) $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) - \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \neq 0.$

Potom existuje U okolí bodu $\boldsymbol{x}_0$ (v $\mathbb{R}^n$) a okolí V bodu $\boldsymbol{y}_0$ (v $\mathbb{R}^2$) taková, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje jediné $\boldsymbol{y} \in V$ splňující $F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 = F_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Můžeme tedy reprezentovat $[y_1, y_2] = [\varphi(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{x})]$ pro nějaké funkce $\varphi, \psi : U \to V$. Navíc platí, že $\varphi, \psi \in C^k(U)$ a pro $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_k} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}(\boldsymbol{x}_0, \varphi(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{x})) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}(\boldsymbol{x}_0, \varphi(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{x} \in U.$$

Příklad 1. V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí předepsaného bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x. Dále spočtěte její první i druhou derivaci v bodě x_0. Nakonec napište rovnici tečné přímky ke grafu této funkce v bodě x_0.

(a) $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1, [x_0, y_0] = [1, 0]$.
(b) $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0, [x_0, y_0] = [0, 1]$.
(c) $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1, [x_0, y_0] = [2, 0]$.
(d) $\sin(xy) + \cos(xy) = 1, [x_0, y_0] = [\pi, 0]$.
(e) $\log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0, [x_0, y_0] = [0, 0]$.
(f) $\log(x + \arctan y + 1) + xy = 0, [x_0, y_0] = [0, 0]$.
(g) $x^2y^3 + x^2y^2 + \sin y = 0, [x_0, y_0] = [0, 0]$.
(h) $\arctan(y - x) + \arctan \frac{y^2}{x} = \frac{\pi}{4}, [x_0, y_0] = [1, 1]$.
(i) $x^y + y^x = 2y, [x_0, y_0] = [1, 1]$.
(j) $e^{\sin x^2} + e^{\sin(xy)} = 2y + 2, [x_0, y_0] = [0, 0]$.
(k) $\frac{\pi}{2} + \arcsin(x + y^2) = \arccos(x^2 + y), [x_0, y_0] = [0, 0]$.

Příklad 2. V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí předepsaného bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně zadanou funkci proměnných x a y. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, y_0]$.

(a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9, [x_0, y_0, z_0] = [1, -2, 1]$.
(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0, [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1]$.
(c) $\sin(yz) = \frac{x}{z}, [x_0, y_0, z_0] = [1, \frac{\pi}{2}, 1]$.
(d) $-e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} = e^{xyz}, [x_0, y_0, z_0] = [0, 2, 0]$.
(e) $\frac{x}{z} = \log \frac{z}{y}, [x_0, y_0, z_0] = [0, 1, 1]$.
(f) $\sin(x - y) + x^2yz^2 = 1, [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1]$.

Příklad 3. Ukažte, že uvedená soustava rovnic určuje v jistém okolí bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$ implicitně zadané funkce u, v v proměnných x a y. Potom spočtěte parciální derivace obou funkcí v bodě $[x_0, y_0]$.

(a)
$$x = u \cos \frac{v}{u}, \quad y = u \sin \frac{v}{u}, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 0, 1, 0].$$
(b)
$$xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 2, 0, 0].$$
(c)
$$x = e^u + u \sin v, \quad y = e^u - u \cos v, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1 + e, e, 1, \frac{\pi}{2}].$$
(d)
$$5xu + 3yv = 4x^2yv + 4u^2v, \quad 4xyu^3 + xv^2 = 5yuv, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 1, 1, 1].$$

Příklad 4. [Zkouškové] V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí předepsaného bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x. Dále spočtěte její první i druhou derivaci v x_0 a napište rovnici tečné přímky ke grafu této funkce v bodě x_0.

(a) $\arccos(\log x + \log y) = 3 \arcsin \frac{x+y}{4}, [x_0, y_0] = [1, 1]$.
(b) $\sin(\arctan x + \arctan(2y)) + \cos(\arctan x + \arctan(2y)) = 1, [x_0, y_0] = [-1, \frac{1}{2}]$.
(c) $\arctan(x + \sin y) + \arctan(x + \cos y) = \frac{\pi}{4}, [x_0, y_0] = [1, \pi]$.
(d) $\log \frac{\tan x + 2 \tan y}{3} + \log \frac{2 \tan x + \tan y}{3} = 0, [x_0, y_0] = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.
(e) $\sin(e^x - e^y) + 3 \sin \frac{x+y}{2} + \cos(x - y) = 1, [x_0, y_0] = [\pi, \pi]$.
(f) $\log(x + y^3) + e^{x+2y} = 1, [x_0, y_0] = [2, -1]$.
(g) $e^{x^2+y-2} + e^{y^2-x} = 2, [x_0, y_0] = [1, 1]$.

Výsledky - X. Funkce více proměnných - Implicitní funkce

Příklad 1. (a) $\varphi'(1) = -1, \varphi''(1) = 4$ a tečna je $y = 1 - x$.

(b) $\varphi'(0) = 2, \varphi''(0) = -14$ a tečna je $y = 1 + 2x$.

(c) $\varphi'(2) = 0, \varphi''(2) = 0$ a tečna je $y = 0$.

(d) $\varphi'(\pi) = 0, \varphi''(\pi) = 0$ a tečna je $y = \pi$.

(e) $\varphi'(0) = 0, \varphi''(0) = -2$ a tečna je $y = 0$.

(f) $\varphi'(0) = -1, \varphi''(0) = 2$ a tečna je $y = -x$.

(g) $\varphi'(0) = 0, \varphi''(0) = 0$ a tečna je $y = 0$.

(h) $\varphi'(1) = \frac{3}{4}, \varphi''(1) = \frac{1}{32}$ a tečna je $y = 1 + \frac{3}{4}(x - 1)$.

(i) $\varphi'(1) = 1, \varphi''(1) = 4$ a tečna je $y = 1 + 4(x - 1)$.

(j) $\varphi'(0) = 0, \varphi''(0) = 1$ a tečna je $y = 0$.

(k) $\varphi'(0) = -1, \varphi''(0) = 4$ a tečna je $y = -x$.

Příklad 2. (a) Tečná rovina má tvar $T(x, y) = 1 + \frac{7}{5}(y + 2)$.

(b) Tečná rovina má tvar $T(x, y) = 1 - (x - 1) - (y - 1)$.

(c) Tečná rovina má tvar $T(x, y) = 1 + (x - 1)$.

(d) Tečná rovina má tvar $T(x, y) = x$.

(e) Tečná rovina má tvar $T(x, y) = 1 + x + (y - 1)$.

(f) Tečná rovina má tvar $T(x, y) = 1 - \frac{3}{2}(x - 1)$.

Příklad 3. (a) $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1, 0) = 1$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1, 0) = 0$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}(1, 0) = 0$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}(1, 0) = 1$.

(b) $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1, 2) = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1, 2) = -\frac{1}{3}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}(1, 2) = -1$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}(1, 2) = \frac{1}{3}$.

(c) $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1 + e, e) = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1 + e, e) = 0$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}(1 + e, e) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}(1 + e, e) = 1$.

(d) $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1, 1) = -\frac{17}{22}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1, 1) = \frac{1}{22}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{11}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}(1, 1) = -\frac{5}{22}$.

Příklad 4. (a) $\varphi'(1) = -1, \varphi''(1) = \frac{4}{2+\sqrt{3}}$ a tečna je $y = 2 - x$.

(b) $\varphi'(-1) = -\frac{1}{2}, \varphi''(-1) = 0$ a tečna je $y = -\frac{x}{2}$.

(c) $\varphi'(1) = 3, \varphi''(1) = 14$ a tečna je $y = \pi + 3(x - 1)$.

(d) $\varphi'(\frac{\pi}{4}) = -1, \varphi''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{32}{9}$ a tečna je $y = \frac{\pi}{2} - x$.

(e) $\varphi'(\pi) = \frac{2e^\pi - 3}{2e^\pi + 3}, \varphi''(\pi) = -24\frac{2e^{2\pi} - 3}{(2e^{2\pi} + 3)^3}$ a tečna je $y = \pi + \frac{2e^\pi - 3}{2e^\pi + 3}(x - \pi)$.

(f) $\varphi'(2) = -\frac{2}{5}, \varphi''(2) = \frac{24}{125}$ a tečna je $y = -1 - \frac{2}{5}(x - 2)$.

(g) $\varphi'(1) = -\frac{1}{3}, \varphi''(1) = -\frac{70}{27}$ a tečna je $y = 1 - \frac{1}{3}(x - 1)$.