XII. Maticový počet

Shrnutí teorie.

Pracujeme s reálnými maticemi

$$\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

první index (od 1 do m) značí číslo řádku a druhý (od 1 do n) číslo sloupce. Množinu matic typu $m \times n$ značíme $M(m \times n)$.

Víme co je rovnost matic, matice mezi sebou umíme sčítat. Existuje nulová a jednotková "$\mathbb{I}$"matice. Umíme násobit matici skalárem (tj. číslem). Dále lze matici transponovat, tj. prohodit řádky a sloupce, značíme $\mathbb{A}^\top$.

Dvě matice umíme vynásobit platí-li, že počet řádků první matice odpovídá počtu sloupců druhé matice. Tato operace není komutativní (už z toho důvodu, že pro prohozené pořadí matic nemusí být dobře definována).

Matice $\mathbb{A}^{-1} \in M(n^2)$ je inverzní maticí k matici $\mathbb{A} \in M(n^2)$ platí-li, že $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}$. Matice je pak tzv. regulární (a tedy i její inverze).

Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(n \times m)$ je schodovitá, jestliže pro každé $i \in \{2, \dots, m\}$ platí, že i-tý řádek matice $\mathbb{A}$ je nulový nebo začíná větším počtem nul než řádek předcházející.

Hodnost $h(\mathbb{A})$ schodovité matice je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Elementárními řádkovými úpravami matice $\mathbb{A}$ rozumíme následující.

(i) Prohození dvou řádků.

(ii) Vynásobení řádku nenulovým číslem.

(iii) Přičtení (i nulového) násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Elementární řádkové úpravy nemění hodnost matice.

Determinantem čtvercové matice $\mathbb{A} \in M(n^2)$ rozumíme výraz

$$\det \mathbb{A} = \begin{cases} a_{11} & \text{je-li } n = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbb{A}_{i,1} & \text{je-li } n > 1 \end{cases},$$

přičemž $\mathbb{A}_{i,1}$ reprezentuje matici vzniklou z $\mathbb{A}$ vynecháním i-tého řádku a prvního sloupce.

Elementární řádkové úpravy mění hodnotu determinantu následovně.

(i) Prohození dvou řádků obrací znaménko determinantu.

(ii) Determinant matice vzniklé vynásobením nenulovým číslem $a \in \mathbb{R}$ je a-násobkem determinantu původní matice.

(iii) Přičtení (i nulového) násobku jednoho řádku k jinému řádku determinant nemění.

Determinant horní trojúhelníkové matice (tj. matice s nulovými prvky pod hlavní diagonálou) je roven součinu prvků na hlavní diagonále.

Determinant součinu dvou matic je roven součinu determinantů, za předpokladu, že jsou obě čtvercové. Determinant transponované matice je roven determinantu původní matice. Determinant inverzní matice je převrácená hodnota determinantu původní matice.

Matice a řádkové úpravy lze použít k řešení soustav lineárních rovnic (mluvíme pak o rozšíření matici soustavy). Zde je podstatné, že řádkové úpravy nemění množinu řešení dané soustavy. Z toho je speciálně vidět, že je tak možno nalézt inverzní matici.

Příklad 1. [Hodnost] Určete hodnost zadané matice v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & -2 & 2 & -10 \\ 7 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2(a-1) & 3a+1 & a \\ 1-a & -2 & -1 \\ a & 2a & a \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 & 2 & a \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 15 & 12 & 25 & 42 \\ 2 & 5 & 4 & 8 & 14 \\ 1 & -1 & 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$

Příklad 2. [Inverzní matice] Nalezněte inverzní matici k předepsané matici.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad 3. [Determinant] Spočtěte determinant matice $\mathbb{A}$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

(a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

(b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(d) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(e) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(f) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

(g) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{pmatrix}$.

(h) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & a & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(i) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a & -2 \\ 1 & a & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(j) $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(k) $\mathbb{A} = \mathbb{B}^2\mathbb{C}^{-1}\mathbb{B}^\top$, kde

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. [Soustavy] Vyřešte zadané soustavy rovnic v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$. Případně vyřešte soustavu se zadanou maticí a různými pravými stranami.

(a)

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ 2x + 3y &= 1 \\ -y + z &= 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x - z &= -2 \\ -x + y &= 1 \\ 2x + y + 3z &= 13 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + w &= -5 \\ 2x + 3y - z + 2w &= 0 \\ 7x - y + 4z - 3w &= 15 \\ x + y - 2z - w &= -3 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x + y + 2u + 3v &= 1 \\ 3x + 4y + u + v &= 1 \\ 2x + 2u + 4v &= 1 \\ 2x + 5y + u &= 1 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_4 &= -1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= -1 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 6x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 25x_4 &= 42 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= 14 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= -7 \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -1 \\ ax_1 + ax_2 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(i) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(j) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Výsledky - XII. Maticový počet

Příklad 1. [Hodnost]

(a) 3.

(b) 3.

(c) Pro $a = 1$ vyjde 1, jinak 3.

(d) Pro $a \in \{-1, 0, 2\}$ vyjde 2, jinak 3.

(e) Pro $a = 1$ vyjde 3, jinak 4.

(f) 3.

Příklad 2. [Inverzní matice]

(a) Inverze neexistuje.

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(d) $\frac{1}{42} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 & 11 \\ -21 & 23 & -5 & 10 \\ -21 & 12 & -1 & 2 \\ 21 & -5 & 2 & -25 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -20 & 4 & 12 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & -3 \\ 10 & -10 & 2 & -2 & 16 \\ 6 & -6 & -2 & 2 & 14 \\ 5 & 11 & -7 & -1 & -15 \end{pmatrix}$

Příklad 3. [Determinant]

(a) Determinant neexistuje.

(b) 1.

(c) 6.

(d) -84.

(e) 1.

(f) 0.

(g) $-29\,400\,000$.

(h) $7 - 6a$.

(i) $a^2 - 2$.

(j) $\frac{1}{4}$.

(k) $\frac{27}{10}$.

Příklad 4. [Soustavy]

(a) $x = 5, y = -3, z = -2$.

(b) $x = 1, y = 2, z = 3$.

(c) $x = 1, y = 0, z = 2, w = 0$.

(d) $(x, y, u, v) \in \{[\frac{1}{6} - t, t, \frac{2}{3} - 3t, -\frac{1}{6} + 2t]; t \in \mathbb{R}\}$.

(e) $x_1 = 5, x_2 = -3, x_3 = 3, x_4 = 5$.

(f) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{[-3 - 2t, 4, t, 0]; t \in \mathbb{R}\}$.

(g) Je-li $a = -\frac{3}{2}$, pak soustava nemá řešení.
V ostatních případech je $x_1 = -\frac{2a}{3+2a}, x_2 = \frac{a-3}{3+2a}, x_3 = -\frac{3}{3+2a}, x_4 = -\frac{a}{3+2a}$.

(h) Je-li $a = 1$, pak soustava nemá řešení.
V ostatních případech je $x_1 = \frac{5a+12}{6(a-1)}, x_2 = -\frac{5a+6}{6(a-1)}, x_3 = -\frac{a+6}{2(a-1)}, x_4 = \frac{a}{2(a-1)}$.

(i) Pro $\boldsymbol{b}_2$ řešení neexistuje. Pro $\boldsymbol{b}_1$ jsou řešením prvky množiny $\{[-1-t, 2-t, t]; t \in \mathbb{R}\}$.

(j) Pro $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3$ řešení neexistují. Pro $\boldsymbol{b}_2$ jsou řešením prvky množiny $\{\frac{1}{2}[1 - t, 3 - t, 5t - 1, 2t]; t \in \mathbb{R}\}$.