Příklady na 1. bonusové cvičení

Příklad. (Derivace - jednodušší) Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sin|x^2+y^2-1|.$$

Spočítejte její parciální derivace podle x i y všude, kde existují. Nakonec najděte rovnici tečné roviny v bodě $\boldsymbol{a} = [\pi, 1]$.

Pozn. *Definičním oborem je celá rovina. Standardně obdržíme*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot sign\,(x^2+y^2-1)\cos|x^2+y^2-1|\,, x^2+y^2 \neq 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \cdot sign\,(x^2+y^2-1)\cos|x^2+y^2-1|\,, x^2+y^2 \neq 1.$$

Lze spočíst, že $f_x(0,\pm1) = f_y(\pm1,0) = 0$*. Derivace ve zbylých bodech neexistují. Alespoň na nějakém okolí bodu* $[\pi,1]$ *jsou parciální derivace spojité, pro tečnou rovinu dostaneme* $T(x,y) = \sin\pi^2 + 2\pi(x-\pi)\cos\pi^2 + 2(y-1)\cos\pi^2$.

Příklad. (Derivace - složitější) Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \log\frac{1-\sqrt[3]{x}}{|y|+\sqrt[3]{x}}\,.$$

Spočítejte její parciální derivace podle x i y všude, kde existují. Nakonec najděte rovnici tečné roviny v bodě $\boldsymbol{a} = [-1, 3]$.

Pozn. $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \in (0,1) \vee (0 \geq x \wedge y \in (-\infty, \sqrt[3]{x}) \cup (-\sqrt[3]{x}, +\infty))\}$. *Dostaneme*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-|y|-1}{3\sqrt[3]{x^2}(1-\sqrt[3]{x})(|y|+\sqrt[3]{x})}, [x,y] \in D_f,\ x \neq 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-sign\ y}{|y|+\sqrt[3]{y}}, [x,y] \in D_f,\ y \neq 0.$$

Funkce $f_x(0,y)$ *pro* $y \neq 0$ *a* $f_y(x,0)$ *pro* $x \in (0,1)$ *neexistují. Alespoň na nějakém okolí bodu* $[-1,3]$ *jsou parciální derivace spojité, pro tečnou rovinu dostaneme* $T(x,y) = \frac{7}{6} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$.

Příklad. (Implicitní funkce - rovnice) Ukažte, že rovnice

$$\log\frac{\tan x + 2\tan y}{3} + \log\frac{2\tan x + \tan y}{3} = 0$$

určuje na jistém okolí bodu $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ implicitně zadanou funkci proměnné x. Spočtěte její první i druhou derivaci v bodě $\frac{\pi}{4}$ a napište rovnici tečné přímky v $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Pozn. *Vyjde* $\varphi'(\frac{\pi}{4}) = -1, \varphi''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{32}{9}$ *a tečna je* $y = \frac{\pi}{2} - x$.

Příklad. (Implicitní funkce - soustava) Ukažte, že systém

$$6xyu - 3v = 4xu^2v - yu$$
$$8x^2yv - 6yu^2 = 2xyuv$$

určuje na okolí bodu bodu $[1,1,1,1]$ jednoznačně určené implicitní funkce proměnných y a u. Najděte tečnou rovinu k funkci $v(y,u)$ v bodě $[1,1,1]$.

Pozn. *Vyjde* $T(y,u) = 1 + \frac{49}{55}(y-1) + \frac{7}{55}(u-1)$.