

Příklady na 2. bonusové cvičení

Příklad 1. Nalezněte supremum a infimum funkce

$$f(x, y, z) := xy^2 - x$$

na množině

$$M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4, x - z \geq 0\}$$

a pokud se jich nabývá, určete kde.

Příklad 2. Nalezněte supremum a infimum funkce

$$f(x, y, z) := x + 2y + 3z$$

na množině

$$M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$$

a pokud se jich nabývá, určete kde.

Pozn. Ne vždy je nutné použít větu o dvou multiplifikátorech - viz také př. 4a, d, j či cvičení.

Příklad 3. Na maximálních intervalech existence najděte primitivní funkci

$$\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{(\sin x + 2)(\cos x + 1)} dx.$$

Pozn. Jak by vypadaly intervaly existence, kdyby ve jmenovateli byl člen $\cos x - 1$?

Příklad 4. Na maximálních intervalech existence najděte primitivní funkci

$$\int \frac{\sin^2 x}{2 + \sin^2 x} dx.$$

Pozn.

- Takřka triviální variace na takový příklad je $\int \frac{\cos x \cdot \sin x}{2 + \sin^2 x} dx$. Dá se udělat efektivní substitucí $\sin x = y$, či $y = \tan x$. Ve druhém případě je nutno lepit, ale je to snadné.
- Naopak komplikovanější variace je $\int \frac{1 + 2 \cos x \cdot \sin x}{2 + \sin^2 x} dx$.
- Běžná variace by byl určitý integrál $\int_{-\frac{4}{3}\pi}^{\frac{8}{3}\pi} \frac{\sin^2 x}{2 + \sin^2 x} dx$. Uděláme na posledním cviku.

Příklad 5. Spočtete určitý integrál

$$\int_{-\log 2}^0 \frac{e^{4x} + 4e^{3x} + 2e^{2x} + 2e^x}{e^{4x} + e^{3x} + e^x + 1} dx.$$

Příklad 6. Spočtete určitý integrál

$$\int_{-1}^2 \frac{x + 2}{(x - 3)(1 + \sqrt{x + 1})} dx.$$