

X. Funkce více proměnných - Implicitní funkce

Shrnutí teorie.

Tvrzení. (O implicitní funkci) Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a bod $[\mathbf{x}_0, y_0] \in G$. Uvažujme funkci $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ splňující:

- (a) $F \in C^1(G)$ (či $C^k(G)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$),
- (b) $F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$ a
- (c) $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$.

Potom existuje U okolí bodu \mathbf{x}_0 (v \mathbb{R}^n) a okolí V bodu y_0 (v \mathbb{R}) taková, že pro každé $\mathbf{x} \in U$ existuje jediné $y \in V$ splňující $F(\mathbf{x}, y) = 0$. Můžeme tedy reprezentovat $y = \varphi(\mathbf{x})$ pro nějakou funkci $\varphi : U \rightarrow V$. Navíc platí, že $\varphi \in C^1(U)$ (či dokonce $C^k(U)$) a pro $i \in \{1, \dots, n\}$ máme z přednášky i vzorec pro parciální derivaci podle i -té proměnné v bodě $\mathbf{x} \in U$.

Pozn. Množina kořenů rovnice je tedy lokálně reprezentována grafem jisté funkce.

Příklad. (Kružnice) Uvažujme (implicitní) vztah $x^2 + y^2 = 1$. Chtěli bychom nějak vyjádřit y v závislosti na proměnné x . Zaveďme si proto funkci $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Ta je zjevně spojitá na celém $\mathbb{R}^2 =: G$. Podmínka (a) je tedy zadarmo, co podmínka (b)? Pro ni nás zajímá v jakých bodech $[x_0, y_0] \in G$ nastává $F(x_0, y_0) = 0$. To jsou právě ty body, které leží na jednotkové kružnici. Co poslední podmínka? Máme $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y = 0 \iff y = 0$. Má smysl tedy uvažovat body $[x_0, y_0]$, které leží na jednotkové kružnici, ale ne na ose x (to vyřazuje právě dva body $[1, 0]$ a $[-1, 0]$). Pro ostatní body dostáváme existenci okolí U, V a funkci $\varphi(x) = y : U \rightarrow V$, která je třídy $C^1(U)$ (dokonce C^∞). Vezmeme-li např. $[x_0, y_0] = [0, 1]$, pak $1 = \varphi(0)$ a na okolí U platí

$$x^2 + (\varphi(x))^2 = 1.$$

Jelikož je vše diferencovatelné, tak můžeme derivovat (podle jediné proměnné, která zůstala, tj. x). Získáme tak vztah (pro vhodné okolí U dává dělení smysl)

$$2x + 2\varphi(x) \cdot \varphi'(x) = 0 \implies \varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi(x)} \text{ pro } x \in U.$$

Příklad. (Protočení proměnných) Mějme zadání rovnici

$$x^2 + y + \sin z = 1,$$

ukážeme, že tento vztah určuje na okolí $[1, \pi, 0]$ implicitně zadanou funkci φ proměnných (y, z) . Aby to pasovalo na znění věty, tak vezmeme

$$F(y, z, x) := x^2 + y + \sin z - 1.$$

Je zjevné, že (a), (b) platí triviálně. Ohledně (c) spočteme, že $F_x(y, z, x) = 2x$, a tedy $F_x(\pi, 0, 1) = 2 \neq 0$. Dle naší věty tedy existuje U okolí bodu $[\pi, 0]$ a V okolí 1 taková, že pro každé $[y, z] \in U$ existuje jediné $x \in V$ splňující $F(y, z, \varphi(y, z)) = 0$ a φ je diferencovatelná na U . Máme tedy

$$\varphi^2(y, z) + y + \sin z = 1 \text{ pro } [y, z] \in U.$$

Tuto rovnost můžeme derivovat podle y i dle z , získáme $\varphi_y(\pi, 0) = -\frac{1}{2}$, $\varphi_z(\pi, 0) = -\frac{1}{2}$. Jelikož je φ dokonce $C^2(U)$, tak můžeme spočítat $\varphi_{yz}(\pi, 0) = -\frac{1}{4}$. Díky záměnnosti parciálních derivací vyjde stejně i $\varphi_{zy}(\pi, 0)$.

Tvrzení. (O dvou implicitních funkcích) Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ a bod $[\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0] \in G$. Uvažujme dvě funkce $F_1, F_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$:

- (a) $F_1, F_2 \in C^k(G)$,
- (b) $F_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0, F_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$ a
- (c) $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$.

Potom existuje U okolí bodu \mathbf{x}_0 (v \mathbb{R}^n) a okolí V bodu \mathbf{y}_0 (v \mathbb{R}^2) taková, že pro každé $\mathbf{x} \in U$ existuje jediné $\mathbf{y} \in V$ splňující $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 = F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Můžeme tedy reprezentovat $[y_1, y_2] = [\varphi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})]$ pro nějaké funkce $\varphi, \psi \in C^k(U)$. Opět je možné najít i obecný vzorec pro jejich parciální derivace vyhodnocené v bodě $\mathbf{x} \in U$.

Příklad 1. V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí předepsaného bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x . Dále spočtěte její první i druhou derivaci v bodě x_0 . Nakonec napište rovnici tečné přímky ke grafu této funkce v bodě x_0 .

- (a) $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1, [x_0, y_0] = [1, 0]$.
- (b) $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0, [x_0, y_0] = [0, 1]$.
- (c) $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1, [x_0, y_0] = [2, 0]$.
- (d) $\sin(xy) + \cos(xy) = 1, [x_0, y_0] = [\pi, 0]$.
- (e) $\log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0, [x_0, y_0] = [0, 0]$.
- (f) $\log(x + \arctan y + 1) + xy = 0, [x_0, y_0] = [0, 0]$.
- (g) $x^2y^3 + x^2y^2 + \sin y = 0, [x_0, y_0] = [0, 0]$.
- (h) $\arctan(y - x) + \arctan \frac{y}{x} = \frac{\pi}{4}, [x_0, y_0] = [1, 1]$.
- (i) $x^y + y^x = 2y, [x_0, y_0] = [1, 1]$.
- (j) $e^{\sin x^2} + e^{\sin(xy)} = 2y + 2, [x_0, y_0] = [0, 0]$.
- (k) $\frac{\pi}{2} + \arcsin(x + y^2) = \arccos(x^2 + y), [x_0, y_0] = [0, 0]$.

Příklad 2. V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí předepsaného bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně zadanou funkci proměnných x a y . Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, y_0]$.

- (a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9, [x_0, y_0, z_0] = [1, -2, 1]$.
- (b) $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0, [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1]$.
- (c) $\sin(yz) = \frac{x}{z}, [x_0, y_0, z_0] = [1, \frac{\pi}{2}, 1]$.
- (d) $-e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} = e^{xyz}, [x_0, y_0, z_0] = [0, 2, 0]$.
- (e) $\frac{x}{z} = \log \frac{z}{y}, [x_0, y_0, z_0] = [0, 1, 1]$.
- (f) $\sin(x - y) + x^2yz^2 = 1, [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1]$.
- (g) $\cos(xy + xz + yz - 3) = xyz, [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1]$.
- (h) $\sin(xyz) + 1 = x^2z, [x_0, y_0, z_0] = [1, 0, 1]$.

Příklad 3. Ukažte, že uvedená soustava rovnic určuje v jistém okolí bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$ implicitně zadané funkce u, v v proměnných x a y . Potom spočtěte parciální derivace obou funkcí v bodě $[x_0, y_0]$.

- (a) $x = u \cos \frac{v}{u}, \quad y = u \sin \frac{v}{u}, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 0, 1, 0]$.
- (b) $xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 2, 0, 0]$.
- (c) $x = e^u + u \sin v, \quad y = e^u - u \cos v, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1 + e, e, 1, \frac{\pi}{2}]$.
- (d) $5xu + 3yv = 4x^2yv + 4u^2v, \quad 4xyu^3 + xv^2 = 5yuv, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 1, 1, 1]$.

Příklad 4. V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí předepsaného bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x . Dále spočtěte její první i druhou derivaci v x_0 a napište rovnici tečné přímky ke grafu této funkce v bodě x_0 .

- (a) $\arccos(\log x + \log y) = 3 \arcsin \frac{x+y}{4}, [x_0, y_0] = [1, 1]$.
- (b) $\sin(\arctan x + \arctan(2y)) + \cos(\arctan x + \arctan(2y)) = 1, [x_0, y_0] = [-1, \frac{1}{2}]$.
- (c) $\arctan(x + \sin y) + \arctan(x + \cos y) = \frac{\pi}{4}, [x_0, y_0] = [1, \pi]$.
- (d) $\log \frac{\tan x + 2 \tan y}{3} + \log \frac{2 \tan x + \tan y}{3} = 0, [x_0, y_0] = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.
- (e) $\sin(e^x - e^y) + 3 \sin \frac{x+y}{2} + \cos(x - y) = 1, [x_0, y_0] = [\pi, \pi]$.
- (f) $\log(x + y^3) + e^{x+2y} = 1, [x_0, y_0] = [2, -1]$.
- (g) $e^{x^2+y-2} + e^{y^2-x} = 2, [x_0, y_0] = [1, 1]$.

Výsledky - X. Funkce více proměnných - Implicitní funkce

- Příklad 1.** (a) $\varphi'(1) = -1, \varphi''(1) = 4$ a tečna je $y = 1 - x$.
 (b) $\varphi'(0) = 2, \varphi''(0) = -14$ a tečna je $y = 1 + 2x$.
 (c) $\varphi'(2) = 0, \varphi''(2) = 0$ a tečna je $y = 0$.
 (d) $\varphi'(\pi) = 0, \varphi''(\pi) = 0$ a tečna je $y = \pi$.
 (e) $\varphi'(0) = 0, \varphi''(0) = -2$ a tečna je $y = 0$.
 (f) $\varphi'(0) = -1, \varphi''(0) = 2$ a tečna je $y = -x$.
 (g) $\varphi'(0) = 0, \varphi''(0) = 0$ a tečna je $y = 0$.
 (h) $\varphi'(1) = \frac{3}{4}, \varphi''(1) = \frac{1}{32}$ a tečna je $y = 1 + \frac{3}{4}(x - 1)$.
 (i) $\varphi'(1) = 1, \varphi''(1) = 4$ a tečna je $y = 1 + 4(x - 1)$.
 (j) $\varphi'(0) = 0, \varphi''(0) = 1$ a tečna je $y = 0$.
 (k) $\varphi'(0) = -1, \varphi''(0) = 4$ a tečna je $y = -x$.
- Příklad 2.** (a) Tečná rovina má tvar $T(x, y) = 1 + \frac{7}{5}(y + 2)$.
 (b) Tečná rovina má tvar $T(x, y) = 1 - (x - 1) - (y - 1)$.
 (c) Tečná rovina má tvar $T(x, y) = 1 + (x - 1)$.
 (d) Tečná rovina má tvar $T(x, y) = x$.
 (e) Tečná rovina má tvar $T(x, y) = 1 + x + (y - 1)$.
 (f) Tečná rovina má tvar $T(x, y) = 1 - \frac{3}{2}(x - 1)$.
 (g) Tečná rovina má tvar $T(x, y) = 3 - x - y$.
 (h) Tečná rovina má tvar $T(x, y) = 3 - 2x + y$.
- Příklad 3.** (a) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 0) = 1, \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 0) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x}(1, 0) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y}(1, 0) = 1$.
 (b) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 2) = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 2) = -\frac{1}{3}, \frac{\partial \psi}{\partial x}(1, 2) = -1, \frac{\partial \psi}{\partial y}(1, 2) = \frac{1}{3}$.
 (c) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1 + e, e) = \frac{1}{e+1}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1 + e, e) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x}(1 + e, e) = -\frac{e}{e+1}, \frac{\partial \psi}{\partial y}(1 + e, e) = 1$.
 (d) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 1) = -\frac{51}{66}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1) = \frac{1}{22}, \frac{\partial \psi}{\partial x}(1, 1) = -\frac{3}{22}, \frac{\partial \psi}{\partial y}(1, 1) = -\frac{5}{22}$.
- Příklad 4.** (a) $\varphi'(1) = -1, \varphi''(1) = \frac{4}{2+\sqrt{3}}$ a tečna je $y = 2 - x$.
 (b) $\varphi'(-1) = -\frac{1}{2}, \varphi''(-1) = 0$ a tečna je $y = -\frac{x}{2}$.
 (c) $\varphi'(1) = 3, \varphi''(1) = 14$ a tečna je $y = \pi + 3(x - 1)$.
 (d) $\varphi'(\frac{\pi}{4}) = -1, \varphi''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{32}{9}$ a tečna je $y = \frac{\pi}{2} - x$.
 (e) $\varphi'(\pi) = \frac{2e^\pi - 3}{2e^\pi + 3}, \varphi''(\pi) = -24 \frac{2e^{2\pi} - 3}{(2e^{2\pi} + 3)^3}$ a tečna je $y = \pi + \frac{2e^\pi - 3}{2e^\pi + 3}(x - \pi)$.
 (f) $\varphi'(2) = -\frac{2}{5}, \varphi''(2) = \frac{24}{125}$ a tečna je $y = -1 - \frac{2}{5}(x - 2)$.
 (g) $\varphi'(1) = -\frac{1}{3}, \varphi''(1) = -\frac{70}{27}$ a tečna je $y = 1 - \frac{1}{3}(x - 1)$.