XII. Primitivní funkce

Shrnutí teorie.

Z přednášky víme, že ke spojité funkci f, definované na neprázdném otevřeném intervalu I, existuje tzv. *primitivní funkce* F, tj. funkce splňující $F'(x) = f(x)$ na celém I (F je "antiderivace" k f). Dále víme, že je-li F primitivní funkce k f, tak potom i $F + c$ je primitivní funkce pro každé $c \in \mathbb{R}$. Množinu všech primitivních funkcí k f značíme symbolem $\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} F(x)$.

Operace *integrování*, tj. hledání primitivní funkce, je lineární vůči sčítání funkcí a násobení číslem, tj. pro f, g spojité na tomto intervalu a $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\int (af(x) + bg(x))\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I.$$

Tvrzení. (Integrace per partes) Buď F, G primitivní funkce ke spojitým funkcím f, g na neprázdném otevřeném intervalu I. Potom platí

$$\int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Tvrzení. (1. věta o substituci) Buď F primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) a ať je φ diferencovatelná funkce na (α, β). Je-li $\mathcal{H}_\varphi \subset (a, b)$, tak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} F(\varphi(t)) \text{ pro } t \in (\alpha, \beta).$$

Tvrzení. (2. věta o substituci) Buď φ ryze monotónní funkce zobrazující (α, β) na (a, b) a φ' je spojitá na (α, β). Buď dále f definovaná na (a, b) splňující pro $t \in (\alpha, \beta)$ vztah

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} G(t).$$

Potom pro $x \in (a, b)$ platí, že

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)).$$

Pozn. *(O racionálních funkcích) Je-li f racionální funkce (tj. podíl polynomů), tak ji dovedeme rozložit na konečný součet jednodušších racionálních funkcí (tzv. rozklad na parciální zlomky). Tyto jednotlivé zlomky dovedeme vždy integrovat a dohromady získat primitivní funkci k f.*

Pozn. *(Kuchařkové substituce) Buď $R(u, v)$ racionální funkce v proměnných u, v.*

(i) Je-li $f(x) = R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ pro $ad \neq bc$, $n > 1$ přirozené, pak lze v $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ použít substituci ve tvaru $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Dostaneme $x = \frac{t^n d - b}{a - ct^n} =: \varphi(t)$.

(ii) Je-li $f(x) = R(e^{\alpha x})$ pro $\alpha \neq 0$, pak lze v $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ použít substituci $t = e^{\alpha x}$.

(iii) Je-li $f(x) = \frac{1}{x}R(\log x)$, pak lze v $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ použít substituci $t = \log x$.

(iv) Je-li $f(x) = R(\sin x, \cos x)$, pak lze v $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ použít substituci ve tvaru $t = \tan \frac{x}{2}$. Zde se můžou vyskytnout ještě speciální podpřípady:

- *Je-li $R(u, -v) = -R(u, v)$, pak lze užít $t = \sin x$.*
- *Je-li $R(-u, v) = -R(u, v)$, pak lze užít $t = \cos x$.*
- *Je-li $R(-u, -v) = R(u, v)$, pak lze užít $t = \tan x$.*

Tvrzení. (O existenci primitivní funkce) Je-li f spojitá na neprázdném intervalu (a, b), pak má primitivní funkci na celém (a, b).

Tvrzení. (O určitém integrálu) Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Buď F primitivní funkce k f na (a, b), pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b := \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Příklad 1. [Elementární] Spočtěte následující integrály a určete maximální množinu existence.

(a) $\int \sin^2 x + \cos^2 x$.
(b) $\int 5x^7 + \frac{9}{x^2}$.
(c) $\int \sqrt{x} + e^{2x}$.
(d) $\int 2\sin 3x + e^{-x} + 4$.
(e) $\int x^{\frac{1}{5}} - \frac{2}{x^3}$.
(f) $\int (x+1)^2 + \cos\frac{x}{2} + \frac{7}{x}$.
(g) $\int (2-x)^4 - \frac{1}{1+x^2}$.
(h) $\int \frac{x^3+4x+1}{2\sqrt{x}}$.
(i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
(j) $\int \frac{1}{1-x^2}$.
(k) $\int \frac{x}{1-x^2}$.
(l) $\int \sin^2 x$.
(m) $\int \frac{4x^3}{x^4+1}$.
(n) $\int \sin 2x \cdot \cos 3x$.
(o) $\int \tan 5x$.

Příklad 2. [Integrace per partes] Spočtěte následující integrály a určete maximální množinu existence.

(a) $\int 2xe^{-x}$.
(b) $\int x\sin x$.
(c) $\int (3x^3+x^2+1)e^{3x}$.
(d) $\int e^x \cos x$.
(e) $\int x\arctan x$.
(f) $\int x^2 \log x$.
(g) $\int \sqrt{x}\log^2 x$.
(h) $\int \log^2 x + \log x^2$.
(i) $\int \sin(\log 2x)$.
(j) $\int \frac{x}{\cos^2 4x}$.
(k) $\int x^2 \sin^2 x$.
(l) $\int \left(\frac{\cos x}{\log x} - \frac{\sin x}{x\log^2 x}\right)$.

Příklad 3. [Substituce] Spočtěte následující integrály a určete maximální množinu existence.

(a) $\int (3x-2)^6$.
(b) $\int \sin(2x+1)$.
(c) $\int \sqrt{4x-1}$.
(d) $\int \frac{1}{2x+1}$.
(e) $\int \frac{1}{\sqrt{1-7x}}$.
(f) $\int \frac{1}{(x+1)^2+1}$.
(g) $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}$.
(h) $\int -\frac{1}{\sqrt{8-3x^2}}$.
(i) $\int 3xe^{-x^2}$.
(j) $\int \frac{\cos x}{\sin x}$.
(k) $\int \cos^4 x \cdot \sin x$.
(l) $\int \frac{e^x}{3+e^x}$.
(m) $\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan^3 x}$.
(n) $\int \frac{\sin x}{2+\cos x}$.
(o) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}$.
(p) $\int \cos^5 x$.
(q) $\int \frac{x}{2+x^4}$.
(r) $\int e^{2x}\arctan e^x$.
(s) $\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x$.
(t) $\int \frac{\sin^3 x}{2-\cos x}$.
(u) $\int \tan^5 x$.
(v) $\int \sqrt{1-2x^2}$.
(w) $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$.
(x) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
(y) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}$.
(z) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}+x\sqrt[5]{x^2}}$.
(ž) $\int \frac{x-1}{2\sqrt[3]{x+1}}$.

Příklad 4. [Mišmaš] Spočtěte následující integrály.

(a) $\int \frac{1}{x^6}\sin\frac{1}{x^5}$.
(b) $\int x^3 \log 2x$.
(c) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}$.
(d) $\int x^5 e^{-x^2}$.
(e) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$.
(f) $\int \frac{e^{3x}-e^x+1}{e^x+1}$.
(g) $\int \arcsin x$.
(h) $\int \tan^2 x$.
(i) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}$.
(j) $\int x^3 \cos x$.
(k) $\int \frac{1}{5+2x^2}$.
(l) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}$.
(m) $\int x^2 \arccos x$.
(n) $\int \frac{1+e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.
(o) $\int \sqrt[5]{1-2x}$.
(p) $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$.
(q) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}$.
(r) $\int \log(x+\sqrt{1+x^2})$.
(s) $\int \frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}$.
(t) $\int \frac{6x}{2+\sqrt[3]{x^2-3}}$.
(u) $\int \arcsin^2 x$.
(v) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}$.
(w) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x-1}}$.
(x) $\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}$.
(y) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}$.
(z) $\int \frac{x^9}{\sqrt[5]{5x^5+5}}$.
(ž) $\int x\log\frac{1+x}{1-x}$.

Příklad 5. [Parciální zlomky] Spočtěte následující integrály.

(a) $\int \frac{2x+1}{(x+1)(2x+3)}$.
(b) $\int \frac{x-1}{x(x+1)^3}$.
(c) $\int \frac{x^{15}-3}{x-1}$.
(d) $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}$.
(e) $\int \frac{x^4}{x^4+2x^2-3}$.
(f) $\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.
(g) $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}$.
(h) $\int \frac{x}{x^3+1}$.
(i) $\int \frac{x^4}{x^2-x+2}$.
(j) $\int \frac{1}{x^4+x^2+1}$.
(k) $\int \frac{x^2+2x-2}{(2x+1)(x^2+x+1)^2}$.
(l) $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}$.

Příklad 6. [Kuchařkové substituce - trigonometrické] Spočtěte následující integrály.

(a) $\int \frac{1}{\sin x}$.

(b) $\int \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

(c) $\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}$.

(d) $\int \frac{1}{2-\cos x}$.

(e) $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}$.

(f) $\int \frac{1}{\cos x\cdot\sin^3 x}$.

(g) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}$.

(h) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}$.

(i) $\int \frac{\sin^3 x}{1+4\cos^2 x+3\sin^2 x}$.

(j) $\int \frac{3\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x+3\cos^2 x}$.

(k) $\int \frac{\sin x}{\sin x-\cos x}$.

(l) $\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin^3 x}$.

(m) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$.

(n) $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}$.

(o) $\int \frac{1+\tan^2 x}{2+\tan x}$.

Příklad 7. [Kuchařkové substituce - ostatní] Spočtěte následující integrály.

(a) $\int \frac{\log x}{x-x\log x}$.

(b) $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}$.

(c) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$.

(d) $\int \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}$.

(e) $\int \frac{e^{4x}+e^{2x}}{e^{3x}-1}$.

(f) $\int \frac{1}{x\log x\cdot\log(\log x)}$.

(g) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$.

(h) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}}$.

(i) $\int \frac{1}{x(\log^3 x-1)}$.

(j) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$.

(k) $\int \frac{1}{x}\sqrt{x^2-2x}$.

(l) $\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

Příklad 8. [Lepení] Určete primitivní funkci na všech intervalech, kde existuje.

(a) $\int |x|$.

(b) $\int |1-x|+|1+x|$.

(c) $\int \max\{1,x^2\}$.

(d) $\int e^{-|x|}$.

(e) $\int |\sin x|$.

(f) $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}$.

(g) $\int \frac{1}{\sin x+\cos x+2}$.

(h) $\int \frac{1}{3\cos^2 x+\sin 2x+1}$.

(i) $\int \frac{1}{6\cos^2 x+4\sin x\cos x+\sin^2 x}$.

Příklad 9. [Určité integrály] Spočtěte následující určité integrály.

(a) $\int_{-3}^{7} x^3-2x+1$.

(b) $\int_0^3 |1-x|$.

(c) $\int_0^{2\pi} 2\sin^2 x$.

(d) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\log x|$.

(e) $\int_0^{\pi} x^2\cos^2 x$.

(f) $\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x$.

(g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x$.

(h) $\int_0^{\log 4} xe^{-x}$.

(i) $\int_0^{10\pi} \sqrt{1-\cos 2x}$.

(j) $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}$.

(k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$.

(l) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$.

(m) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

(n) $\int_{-4\pi}^{4\pi} \frac{\sin x}{\sin^4 x+\cos^2 x}$.

(o) $\int_{-1}^{1} \frac{e^{4x}+4e^{3x}-e^{2x}-2e^x}{(e^{2x}+1)(2e^{2x}+3e^x+1)}$.

Příklad 10. [Zkouškové] Spočtěte zadané integrály, není-li řečeno jinak, tak na maximálním intervalu.

(a) $\int \frac{\tan x}{6+11\cos x+6\cos^2 x+\cos^3 x}$.

(b) $\int \frac{1}{2+\sin x}$.

(c) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x+4}}$.

(d) $\int e^{3x}\cos^2 x$.

(e) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x+5}$ na $(-\pi,\pi)$.

(f) $\int \frac{x+\log x}{x^2}\log x$.

(g) $\int \frac{1+\tan^2 x}{(1+\sin 2x)^2}$.

(h) $\int \frac{1}{(16-x^2)\sqrt{x}}$.

(i) $\int \frac{\log^3 x+2\log x}{x\log^3 x-x}$.

(j) $\int \frac{2e^{4x}-5e^{3x}+8e^{2x}-e^x}{(e^{2x}-2e^x-3)(e^{2x}-e^x+2)}$.

(k) $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{(x-x^{\frac{3}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+4)}$.

(l) $\int \frac{1}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$.

(m) $\int\limits_2^e \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log^3 x+2\log x}$.

(n) $\int\limits_0^{4\pi} \frac{1}{(2+\sin x)(3+\cos x)}$.

(o) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}$.

(p) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x-2\sin^4 x}$.

Výsledky - XII. Primitivní funkce

Není-li řečeno jinak, tak jsou výsledky uvedeny ”až na konstantu”.

Příklad 1. [Elementární]

(a) x, $x \in \mathbb{R}$.
(b) $\frac{5}{7}x^8 + 3x^3$, $x \in \mathbb{R}$.
(c) $\frac{3}{2}\sqrt{x^3} + \frac{1}{2}e^{2x}$, $x > 0$.
(d) $-\frac{2}{3}\cos 3x - e^{-x} + 4x\, x \in \mathbb{R}$.
(e) $\frac{6}{5}x^{\frac{6}{5}} + \frac{1}{x^2}$, $x \in (-\infty, 0), (0, +\infty)$.
(f) $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 2\sin\frac{x}{2} - \frac{7}{2x^2}$, $x \in (-\infty, 0), (0, +\infty)$.
(g) $\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 16x - \frac{32}{5} + \operatorname{arccotan} x$, $x \in \mathbb{R}$.
(h) $\frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$, $x > 0$.
(i) $\arcsin x$, $x \in (-1, 1)$.
(j) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, $x \in (-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$.
(k) $-\frac{1}{2}\log|1 - x^2|$, $x \in (-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$.
(l) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.
(m) $\log(1 + x^4)$, $x \in \mathbb{R}$.
(n) $\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x$, $x \in \mathbb{R}$.
(o) $-\frac{1}{5}\log|\cos 5x|$, $x \in \left(-\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}\right), k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 2. [Integrace per partes]

(a) $-2(x + 1)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
(b) $\sin x - x\cos x$, $x \in \mathbb{R}$.
(c) $\left(x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{5}{27}\right)e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$.
(d) $\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
(e) $\frac{1}{2}(1 + x^2)\arctan x - \frac{1}{2}x$, $x \in \mathbb{R}$.
(f) $\frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{9}x^3$, $x > 0$.
(g) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log^2 x - \frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\log x + \frac{16}{27}x^{\frac{3}{2}}$, $x > 0$.
(h) $x\log^2 x$, $x > 0$.
(i) $\frac{1}{2}x\sin(\log 2x) - \frac{1}{2}x\cos(\log 2x)$, $x > 0$.
(j) $\frac{1}{4}x\tan 4x + \frac{1}{16}\log|\cos 4x|$, $x \in \left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}$.
(k) $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1-2x^2}{8}\sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.
(l) $\frac{\sin x}{\log x}$, $x \in (0, 1), (1, +\infty)$.

Příklad 3. [Substituce]

(a) $\frac{1}{21}(3x - 2)^6$, $x \in \mathbb{R}$.
(b) $-\frac{1}{2}\cos(2x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
(c) $\frac{1}{6}\sqrt{(4x - 1)^3}$, $x > \frac{1}{4}$.
(d) $\frac{1}{2}\log|2x + 1|$, $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
(e) $-\frac{2}{7}\sqrt{1 - 7x}$, $x < \frac{1}{7}$.
(f) $\arctan(x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
(g) $-\frac{1}{2(x^2+1)}$, $x \in \mathbb{R}$.
(h) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x$, $-2\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.
(i) $-\frac{3}{2}e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(j) $\log|\sin x|$, $x \in (k\pi, \pi + k\pi)\,, k \in \mathbb{Z}$.

(k) $-\frac{1}{5}\cos^5 x$, $x \in \mathbb{R}$.

(l) $\log(3 + e^x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(m) $-\frac{1}{2\arctan^2 x}$, $x \in (-\infty, 0), (0, +\infty)$.

(n) $-\log(2 + \cos x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(o) $2\sqrt{x-1} - 2\log(\sqrt{x-1} - 1)$, $x > 1$.

(p) $\frac{5}{8}\sin x + \frac{5}{48}\sin 3x + \frac{1}{80}\sin 5x$, $x \in \mathbb{R}$.

(q) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2}{\sqrt{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

(r) $\frac{e^{2x}+1}{2}\arctan e^x - \frac{1}{2}e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

(s) $-\frac{1}{9}\cos^9 x + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x$, $x \in \mathbb{R}$.

(t) $-3\log(2 - \cos x) - 2\cos x - \frac{1}{2}\cos^2 x$, $x \in \mathbb{R}$.

(u) $\frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \log|\cos x|$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

(v) $\frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(2x)$, $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(w) $-\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$, $x < 0, x > 0$.

(x) $\log(x + \sqrt{1+x^2})$, $x \in \mathbb{R}$.

(y) $-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}$, $x \in (-\infty, -1), (0, +\infty)$.

(z) $\log\frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}} + \frac{10}{\sqrt[10]{x}} - \frac{5}{\sqrt[5]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}$, $x > 0$.

(ž) $\frac{3}{10}(x-4)(x+1)^{\frac{2}{3}}$, $x \in (-\infty, -1), (-1, +\infty)$.

Příklad 4. [Mišmaš]

(a) $\frac{1}{5}\cos\frac{1}{x^5}$.

(b) $\frac{1}{4}x^4\log 2x - \frac{1}{16}x^4$.

(c) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}}$.

(d) $\left(-\frac{1}{2}x^4 - x^2 - 1\right)e^{-x^2}$.

(e) $2\arctan\sqrt{x}$.

(f) $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x - \log(e^x + 1)$.

(g) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

(h) $-x + \tan x$.

(i) $\log|\sin x| - \frac{1}{2}\sin^2 x$.

(j) $x^3\sin x - 3x^2\cos x - 6x\sin x + 6\cos x$.

(k) $\frac{1}{\sqrt{10}}\arctan\sqrt{\frac{2}{5}}x$

(l) $2\sqrt{\sin x}$.

(m) $\frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$.

(n) $\sqrt{1+e^{2x}} + \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}$.

(o) $-\frac{5}{12}(1-2x)^{\frac{6}{5}}$.

(p) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x$.

(q) $\frac{1}{4}\arcsin^4 x$.

(r) $x\log(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.

(s) $\frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+\log x}$.

(t) $\frac{9}{2}(x^2-3)^{\frac{2}{3}} - 18\sqrt[3]{x^2-3} + 36\log(\sqrt[3]{x^2-3} + 2)$.

(u) $x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$.

(v) $\frac{1}{5}(x+2)\sqrt[3]{(3x+1)^2}$.

(w) $2\log(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})-2\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

(x) $2\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+12\sqrt[6]{x}-6\log(1+\sqrt[6]{x})$.

(y) $\log(1+\sin x)$.

(z) $\frac{1}{36\sqrt[5]{5}}(x^5+1)^{\frac{4}{5}}(4x^5-5)$.

(ž) $\frac{1}{2}x^2\log\frac{1+x}{1-x}+x-\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$.

Příklad 5. [Parciální zlomky]

(a)
$$\int \frac{4}{2x+3}-\frac{1}{x+1}=2\log|2x+3|-\log|x+1|\,.$$

(b)
$$\int -\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^3}=\log\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\,.$$

(c)
$$\int -\frac{2}{x-1}+\sum_{k=0}^{14}x^k=-2\log|x-1|+\sum_{k=0}^{14}\frac{1}{k+1}x^{k+1}\,.$$

(d)
$$\int 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+1}-\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{x^2+4}=x+\frac{1}{3}\arctan x-\frac{8}{3}\arctan\frac{x}{2}\,.$$

(e)
$$\int 1+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x^2+3}=x+\frac{1}{8}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{3\sqrt{3}}{4}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\,.$$

(f)
$$\int \frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4x+5}=-\frac{1}{x-2}-\arctan(x-2)\,.$$

(g)
$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}-\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}=\arctan(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}\,.$$

(h)
$$\frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{3}\log|x+1|+\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\,.$$

(i)
$$\int x^2+x-1+\frac{2-3x}{x^2-x+2}=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}\log(x^2-x+2)+\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\,.$$

(j)
$$\frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x-1}{x^2-x+1}=\frac{1}{4}\log\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\,.$$

(k)
$$\int -\frac{44}{9}\cdot\frac{1}{2x+1}+\frac{11}{9}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7x+5}{(x^2+x+1)^2}$$
$$=-\frac{22}{9}\log|2x+1|+\frac{11}{9}\log(x^2+x+1)+\frac{1}{3}\cdot\frac{x-3}{x^2+x+1}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\,.$$

(l)
$$\frac{1}{4}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{-x+1}{x^2-x+1}+\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{-x+1}{(x^2-x+1)^2}$$
$$=\frac{1}{8}\log\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x^2+1}{x^4+x^2+1}+\frac{5}{12\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\,.$$

Příklad 6. [Kuchařkové substituce - trigonometrické]

(a) $\log|\tan\frac{x}{2}|$ pro $x \in (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$.

(b) $2\sqrt{2}(\arctan(\sqrt{2}\tan x - 1) - \arctan(\sqrt{2}\tan x + 1))$.

(c) $\frac{1}{2}\sin^2 x + 2\sin x + 3\log(2 - \sin x)$.

(d) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2})$.

(e) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)$.

(f) $\log|\tan x| - \frac{1}{2\sin^2 x}$ pro $x \in (k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$.

(g) $x + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(h) $\log(3 + \tan^2\frac{x}{2}) - \log(1 + \tan^2\frac{x}{2}) + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2})$.

(i) $\cos x - \frac{5}{2}\arctan(\frac{1}{2}\cos x)$.

(j) $\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan x) - x$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(k) $\frac{1}{2}\log|\tan x - 1| - \frac{1}{4}\log(\tan^2 x + 1) + \frac{1}{2}x$.

(l) $\frac{1}{6}\log|\sin^2 - \sin x + 1| - \frac{1}{3}\log(1 + \sin x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2\sin x - 1)\right)$.

(m) $x - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)$.

(n) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(3\tan\frac{x}{2} + 1)\right)$.

(o) $\log|2 + \tan x|$.

Příklad 7. [Kuchařkové substituce - ostatní]

(a) $-\log x - \log|\log x - 1|$.

(b) $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\log|e^x - 1| + \frac{1}{6}\log(e^x + 2)$.

(c) $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\log(1 + \sqrt[4]{x})$.

(d) $e^x + \frac{2}{3}\log|e^x - 1| - \frac{1}{3}\log(e^{2x} + e^x + 1)$.

(e) $-x - 4\sqrt{2x+3} - 9\log|\sqrt{2x+3} - 3| + \log(\sqrt{2x+3} + 1)$.

(f) $\log|\log(\log x)|$.

(g) $\log\left(1 + \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}\right) - \log\left|\sqrt{\frac{x+2}{x-3}} - 1\right| - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}\right)$.

(h) $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5} - \frac{3}{2}\sqrt[6]{(x+1)^4} + 2\sqrt[6]{(x+1)^3} - 3\sqrt[6]{(x+1)^2} + 6\sqrt[6]{x+1} - 6\log(\sqrt[6]{x+1} + 1)$.

(i) $\frac{1}{3}\log|\log x - 1| - \frac{1}{6}\log|\log^2 x + \log x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\log x + \frac{1}{2})\right)$.

(j) $-\frac{3}{2}\log\left(1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\right) + \frac{3}{2}\log\left|1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\right| + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}}$.

(k) $\log\left|\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - 1\right| - \log\left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1\right) - \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} + \frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$.

(l) $6\log\sqrt[6]{x} - \frac{3}{2}\log(\sqrt[6]{x} + 1) - \frac{9}{4}\log(2\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{x} + 1) - \frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}\right)$.

Příklad 8. [Lepení] Zde pro přehlednost uvádíme i konstanty c.

(a)

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + c, & x < 0 \\ c, & x = 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + c, & x > 0. \end{cases}$$

(b)

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + c, & x < -1 \\ -1 + c, & x = -1 \\ 2x + 1 + c, & -1 < x < 1 \\ 3 + c, & x = 1 \\ x^2 + 2 + c, & x > 1. \end{cases}$$

(c)

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}+c, & x<-1\\ -1+c, & x=-1\\ x+c, & -1<x<1\\ 1+c, & x=1\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}+c, & x>1.\end{cases}$$

(d)

$$F(x)=\begin{cases}e^x+c, & x<0\\ 1+c, & x=0\\ -e^{-x}+2+c, & x>0.\end{cases}$$

(e)

$$F(x)=\begin{cases}1+c, & x=2k\pi\\ -\cos x+2+c, & x\in(2k\pi,\pi+2k\pi)\\ 3+c, & x=\pi+2k\pi\\ \cos x+4+c, & x\in(\pi+2k\pi,2\pi+2k\pi).\end{cases}$$

(f)

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctan}(\sqrt{2}\tan x)+c+k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\\ c+(1+2k)\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x=\frac{\pi}{2}+k\pi.\end{cases}$$

(g)

$$F(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\operatorname{arctan}\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}+c+k\pi\sqrt{2}, & x\in(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi)\\ c+k\pi\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}\sqrt{2}, & x=\pi+2k\pi.\end{cases}$$

(h)

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{\tan x+1}{\sqrt{3}}+c+k\frac{\pi}{\sqrt{3}}, & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}+c+k\frac{\pi}{\sqrt{3}}, & x=\frac{\pi}{2}+k\pi.\end{cases}$$

(i)

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctan}\frac{\tan x+2}{\sqrt{2}}+c+k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}+c+k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x=\frac{\pi}{2}+k\pi.\end{cases}$$

Příklad 9. [Určité integrály]

(a) 550.
(b) $\frac{5}{2}$.
(c) 2π.
(d) $2-\frac{2}{e}$.
(e) $\frac{\pi}{12}(3+2\pi^2)$.
(f) $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(g) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$.
(h) $\frac{3}{4}-\frac{\log 2}{2}$.
(i) $20\sqrt{2}$.
(j) $\frac{1+\sqrt{2}}{30}$.
(k) $\frac{\pi}{2\sqrt{6}}$.

(l) $\frac{\pi}{6}(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})$.

(m) $2\sqrt{2}\pi$.

(n) 0.

(o) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log(2+e)-\frac{1}{2}\log(1+2e)$.

Příklad 10. [Zkouškové]

(a) $-\frac{1}{6}\log|\cos x|+\frac{1}{2}\log(\cos x+1)-\frac{1}{2}\log(\cos x+2)+\frac{1}{6}\log(\cos x+3)$ pro $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \pi+2k\pi\right)$ a $\left(\pi+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

(b) $F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2\tan\frac{x}{2}+1)\right)+\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}$, $x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ a $F((2k+1)\pi)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}$.

(c) $\frac{1}{2}\log\left|2\sqrt{\frac{x+1}{x+4}}-1\right|-\frac{1}{2}\log\left(2\sqrt{\frac{x+1}{x+4}}+1\right)+\log\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+4}}+1\right)-\log\left|\sqrt{\frac{x+1}{x+4}}-1\right|$ na $(-\infty,-4), (-1,0)$ a $(0,+\infty)$.

(d) $\frac{1}{6}e^{3x}+\frac{1}{26}\left(2\sin 2x+3\cos 2x\right)e^{3x}$ pro $x\in\mathbb{R}$.

(e) $\frac{3}{5}\log\frac{\tan^2\frac{x}{2}+1}{3\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}+7}-\frac{x}{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}(3\tan\frac{x}{2}+1)\right)$ na $(-\pi,\pi)$. Díky zadání netřeba lepit.

(f) $\frac{1}{2}\log^2 x-\frac{1}{x}\log^2 x-\frac{2}{x}\log x-\frac{2}{x}$ pro $x>0$.

(g) $\tan x-4\log|1+\tan x|-\frac{8}{1+\tan x}+\frac{4}{(1+\tan x)^2}-\frac{4}{3(1+\tan x)^3}$ na $(-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ a $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, -\frac{\pi}{4}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

(h) $-\frac{1}{16}\log|\sqrt{x}-2|+\frac{1}{16}\log(\sqrt{x}+2)+\frac{1}{8}\arctan\frac{\sqrt{x}}{2}$ na $(0,4)$ a $(4,+\infty)$.

(i) $\log x+\log|\log x-1|-\frac{1}{2}\log|\log^2 x+\log x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\log x+\frac{1}{2})\right)$ pro $x>0$.

(j) $\log(e^x+1)+\log|e^x-3|-\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2e^x-1}{\sqrt{7}}$ na $(-\infty,\log 3)$ a $(\log 3,+\infty)$.

(k) $\frac{4}{9}\log|\sqrt[4]{x}-1|+\frac{2}{9}\log(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1)+\frac{14}{9}\log(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+4)+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{2})\right)-\frac{4\sqrt{15}}{9}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{15}}(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{2})\right)$ pro $x>0$.

(l) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+\pi k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ a $F((2k+1)\pi)=\pi k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(m) $\frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3\log^2 2}\right)$.

(n) $\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

(o) $-\frac{14}{3}+\frac{3}{2}\pi+\log 2$.

(p) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.