Příklad 10(vi). Nalezněte supremum a infimum funkce

$$f(x, y, z) = x(y + z)$$

na množině

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + 2y^2 \leq 1\}$$

a určete, zda a popřípadě kde se nabývá.

Řešení.
Označme $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ a $\psi(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$, ty jsou spojité, a proto je M uzavřená jakožto průnik dvou uzavřených množin (ty jsou uzavřené na základě věty o úrovňových množinách). Zároveň je omezená, protože se jedná o část sféry, M je tedy kompaktní a spojitá funkce f zde tedy nutně nabývá svých extrémů.

Označme $M = M_1 \cup M_2$, kde $M_1 = \{\varphi = 0, \psi < 0\}$ a $M_1 = \{\varphi = 0, \psi = 0\}$. Spočtěme si gradienty funkcí se kterými budeme operovat, tj.

$$\begin{aligned} \nabla f &= (y + z, x, x), \\ \nabla \varphi &= 2(x, y, z), \\ \nabla \psi &= 2(x, 2y, 0). \end{aligned}$$

Množina M_1. Jelikož je f i φ třídy C^1 na celém prostoru, tak lze použít větu o Lagrangeově multiplikátoru ($G = \{\psi < 0\}$ - otevřená ze spojitosti ψ). Věta nám říká, že pro bod extrému nastává jedna ze dvou situací. Buď je $\nabla \varphi$ nulový, což nastává pouze v počátku a ten není v M_1, nebo existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, takové, že

$$\begin{aligned} y + z + 2\lambda x &= 0, \\ x + 2\lambda y &= 0, \\ x + 2\lambda z &= 0. \end{aligned}$$

Vezměme třeba zII - yIII (či bez násobení) a máme

$$x(z - y) = 0.$$

- Je-li $x = 0$, tak $y = -z$ a z vazby dostáváme $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Pro tento bod ale není $\psi < 0$.
- Je-li $y = z$, tak vazby říkají, že $x^2 + 2y^2 = 1$ a zároveň $x^2 + 2y^2 < 1$, což nelze.

Množina M_2. Jelikož je f, φ i ψ třídy C^1 na celém prostoru, tak lze použít větu o Lagrangeově multiplikátoru ($G = \mathbb{R}^3$ - otevřená). První možnost pro extrém je lineární závislost gradientů vazeb. $\nabla \varphi$ zde opět nemůže být nulový, nulovost $\nabla \psi$ dává body $[0, 0, z]$, ty ale tady také neleží. Mohlo by tedy existovat nenulové $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $\nabla \varphi = \alpha \nabla \psi$, to dává $z = 0$, pak z vazeb je $y = 0$ a $x = \pm 1$. Máme $\boxed{f(\pm 1, 0, 0) = 0}$. Druhá možnost je existence dvou multiplikátorů $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ řešících soustavu

$$\begin{aligned} y + z + 2\lambda x + 2\mu x &= 0, \\ x + 2\lambda y + 4\mu y &= 0, \\ x + 2\lambda z &= 0. \end{aligned}$$

Zároveň z našich vazeb dostáváme, že $y^2 = z^2$. Máme tedy dvě varianty.

- Je-li $y = -z$, tak máme systém

$$\begin{aligned} 2\lambda x + 2\mu x &= 0, \\ x + 2\lambda y + 4\mu y &= 0, \\ x - 2\lambda y &= 0, \end{aligned}$$

  takže ze třetí rovnice plyne, že $x = 2\lambda y$ a vazby dávají $4\lambda^2 y^2 + 2y^2 = 1$, tj. $y^2 = \frac{1}{2+4\lambda^2}$. Funkční hodnota v těchto bodech je $\boxed{f(2\lambda y, y, -y) = 0}$.

- Druhou možností je $y = z$, a dostáváme tak

$$\begin{aligned} 2y + 2\lambda x + 2\mu x &= 0, \\ x + 2\lambda y + 4\mu y &= 0, \\ x + 2\lambda y &= 0, \end{aligned}$$

rozdíl druhé a třetí rovnice dává $\mu y = 0$. Je-li $y = 0$, tak z vazeb získáváme $z = 0$ a $x = \pm 1$, což už máme. Zbývá tedy, že $\mu = 0$, tj.

$$\begin{aligned} y + \lambda x &= 0 \\ x + 2\lambda y &= 0. \end{aligned}$$

Vyjádříme $x = -2\lambda y$ a dosadíme, obdržíme

$$y(1 - 2\lambda^2) = 0.$$

  - Je-li $y = 0$, tak z vazeb opět plynou body $[\pm 1, 0, 0]$.
  - Je-li $\lambda^2 = \frac{1}{2}$, tak umocněním vztahu $x = -2\lambda y$ máme, že $x^2 = 4\lambda^2 y^2 = 2y^2$ a vazba dává, že $4y^2 = 1$, a tedy $y = \pm\frac{1}{2} = z$ a $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (pro všechny kombinace). Celkem tedy $\boxed{f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$ a $\boxed{f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Závěr. Vyšetřili jsme všechny varianty a porovnáním hodnot vidíme, že f nabývá maxima $\frac{1}{\sqrt{2}}$ v bodech $[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}]$ a minima $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ v bodech $[\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}]$.

Pozn. *("Nedořešení" soustav) Poznamenejme, že ne vždy soustavy (Lagrange + vazby) vyřeším celé. Obvykle zjistím, že by jedna souřadnice musela být něčemu rovna a potom z vazeb najdu nějaký bod. Ale může se stát, že pro tento bod nebudou existovat (jeden či dva) multiplikátory splňující daný systém, a tedy takový bod nebude bodem extrému.*

Např.: Všimněme si, že v části "$y = z$" a větvi "$y = 0$" píšu, že z vazeb získáme $x = \pm 1$ (a $z = 0$). To je pravda, nicméně, ta relevantní soustava vzniklá použitím Lagrangeových multiplikátorů není v tomto bodě splněna. Je totiž vidět, že když $y = 0$, tak z druhé rovnice nutně je $x = 0$. To tedy nejde dohromady.

Zcela striktně bych měl celé soustavy dořešit, ale je to zbytečné z potenciálně dvou důvodů. Zde to nebylo potřeba z toho důvodu, že nalezený bod jsme již zahrnuli dříve. Pokud by nebyl zahrnut a my jsme ho v nějakém momentu přidali, i přesto, že pro něj daná soustava neplatí, tak se nic neděje (když leží v daných množinách - což je zaručeno tím, že souřadnice dopočítávám z vazeb, pokud možno). Nic se neděje z toho důvodu, že jsme si do finálního porovnávání hodnot zbytečně přidali bod navíc. V něm ale extrém nebude (protože by musel splňovat podmínku z věty o Lagrangeových multiplikátorech). V principu můžeme přidat mezi podezřelé body jakýkoliv bod z množiny se kterou pracujeme. Mezi podezřelé body nesmíme zahrnout pouze body mimo zkoumanou množinu.

Totéž se týká i soustavy vzniklé při zkoumání lineární závislosti vazeb, nicméně v tomto případě, pro změnu, body $[\pm 1, 0, 0]$ danou soustavu splňují.