

Písemkové příklady na extrémy (LS 97/98)

Příklad A: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y) = x^4 y \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^4 + y^4 \leq 16, x \geq -1\}$$

Příklad B: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y) = 2x + 4y \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Příklad C: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y, z) = e^{-z^2} (x^2 + xy + y^2) \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$$

Příklad D: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .
Nakreslete množinu M .

$$f(x, y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3 \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$$

Příklad E: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y, z) = xy + yz \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$$

Příklad F: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2 + y^2)} \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 \leq 1\}$$

Příklad G: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y, z) = z + e^{xy} \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2\}$$

Příklad H: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$$
$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$$

Příklad I: Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Řešení

Příklad A: Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtíme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množin M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^4, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro $[0, y]$; $y \in (-2, 2)$. Hranici množiny M si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^4 + y^4 = 16, x > -1\}, \quad H_2 = \{[-1, y] \in \mathbb{R}^2; y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15} \rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x, y) = x^4 + y^4 - 16$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 4x^3, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 4y^3, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Pro každé $[x, y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^4 + y^4 = 16, \\ (2) \quad & 4x^3y = \lambda 4x^3, \\ (3) \quad & x^4 = \lambda 4y^3. \end{aligned}$$

Z (2) vyplývá, že $x = 0$ nebo $y = \lambda$. V prvním případě dostaneme z (1), že $y = \sqrt[4]{2}$. V druhém případě dostaneme z (3), že $x = \sqrt{2}y$ nebo $x = -\sqrt{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right], \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku $x > -1$.

Zkoumejme chování na množině H_2 . Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(-1, y) = y, \quad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15} \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \quad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right]$ a minima v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right]$.

Příklad B: Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtíme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množiny M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto f nabývá extrémů na hranici M . Hranici množiny M si rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0, y > 0\},$$

$$H_2 = \{[0, y] \in \mathbb{R}^2; y \in \langle 0, 1 \rangle\},$$

$$H_3 = \{[x, 0] \in \mathbb{R}^2; x \in \langle 0, 1 \rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x, y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$, která je (stejně jako f) třídy \mathcal{C}^1 na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \quad x > 0, y > 0.$$

Pro každé $[x, y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$. Řešme následující soustavu

$$(1) \quad \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1,$$

$$(2) \quad 2 = \lambda \frac{1}{4}x^{-3/4},$$

$$(3) \quad 4 = \lambda \frac{1}{4}y^{-3/4}.$$

Z (2) a (3) vyplývá, že $x = 2\sqrt[3]{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme podezřelý bod

$$\left[\frac{2^{4/3}}{(2^{1/3} + 1)^4}, \frac{1}{(2^{1/3} + 1)^4} \right].$$

Zkoumejme chování na množině H_2 . Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(0, y) = 4y, \quad y \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou $[0, 0]$, $[0, 1]$.

Podobně zkoumejme chování na množině H_3 . Funkce f má na H_3 tvar:

$$f(x, 0) = 2x, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Podezřelými body tedy jsou $[0, 0]$, $[1, 0]$.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $[0, 1]$ a minima v bodě $[0, 0]$.

Příklad C: Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní (jedná se o plášť válce bez podstav). Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Vnitřek množiny M je prázdný. Z tvaru funkce f vyplývá, že

$$f(x, y, 1) = f(x, y, -1) < f(x, y, z) < f(x, y, 0), \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3, \quad z \in (-1, 1) \setminus \{0\}.$$

Maxima se musí tedy nabývat na množině $M \cap \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ a minima na množině $M \cap \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; z = -1 \text{ nebo } z = 1\}$. Položme $g(x, y) = x^2 + xy + y^2$ a vyšetřujeme extrémy g na množině $H = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Platí $g, h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce h platí

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Pro každé $[x, y] \in H$ máme $(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 + y^2 = 1, \\ (2) \quad & 2x + y = \lambda 2x, \\ (3) \quad & x + 2y = \lambda 2y. \end{aligned}$$

Sečtením (2) a (3) dostaneme

$$(3 - 2\lambda)(x + y) = 0.$$

To znamená, že buď $x = -y$ nebo $\lambda = 3/2$. V prvním případě dostaneme z (1) podezřelé body $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. Ve druhém případě s pomocí (2) odvodíme $x = y$ a (1) dává podezřelé body $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$. Funkce g nabývá minima na množině H v bodech $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ a maxima v bodech $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$.

Z výše uvedeného výpočtu vyplývá, že funkce f nabývá minima v bodech

$$[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1], [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1], [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1], [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1]$$

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0], [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0].$$

Příklad D: Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu s uzavřenou polorovinou), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body nejprve uvnitř množiny M . Spočteme parciální derivace f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y.$$

Obě parciální derivace jsou nulové v bodech $[-1/2, 0]$, $[0, 0]$. Pouze první bod však patří do vnitřku množiny M .

Hranici množiny M si rozdělíme na dvě části:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x = 0, y \in [-2, 2]\}, \\ H_2 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 4, x < 0\}. \end{aligned}$$

Na množině H_1 má funkce f podezřelé body: $[0, 2]$, $[0, -2]$, $[0, 0]$, protože $f(0, y) = -y^2$. Podezřelé body na H_2 budeme hledat metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Na množině H_2 je vždy $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) \neq (0, 0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 + y^2 = 4, \\ (2) \quad & 2x + 4x^2 = \lambda 2x, \\ (3) \quad & -2y = \lambda 2y. \end{aligned}$$

Z (3) dostaneme, že $\lambda = -1$ nebo $y = 0$. První možnost spolu s (2) dává, že $x = 0$ nebo $x = -1$. Pomocí (1) dopočteme pro tato x příslušná y a dostaneme body

$$[0, 2], [0, -2], [-1, \sqrt{3}], [-1, -\sqrt{3}].$$

První dva ovšem neleží v H_2 . Pokud $y = 0$, pak z (1) dostáváme bod $[-2, 0]$ a bod $[2, 0]$, který ovšem neleží v H_2 .

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima v bodě $[-1/2, 0]$ a minima v bodě $[-2, 0]$.

Příklad E: Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce g_1, g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ stejně jako funkce f . Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= y, & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= x + z, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= y, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) &= 2z, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) &= 1. \end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1, 1, 1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & y = \lambda_1 2x + \lambda_2, \\ (2) \quad & x + z = \lambda_1 2y + \lambda_2, \\ (3) \quad & y = \lambda_1 2z + \lambda_2, \\ (4) \quad & x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (5) \quad & x + y + z = 1. \end{aligned}$$

Z (1) a (3) vyplývá $\lambda_1 x = \lambda_1 z$. To znamená, že máme dvě možnosti: buď $\lambda_1 = 0$ nebo $x = z$.

V prvním případě dostaneme nejprve z (1) $y = \lambda_2$. Odtud a z (2) obdržíme $x + z = y$. Tento vztah spolu s (4) a (5) dává podezřelé body

$$\left[(1 - \sqrt{5})/4, 1/2, (1 + \sqrt{5})/4 \right], \quad \left[(1 + \sqrt{5})/4, 1/2, (1 - \sqrt{5})/4 \right].$$

Ve druhém případě dostaneme pomocí vztahů (4) a (5) podezřelé body

$$[0, 1, 0], \quad [2/3, -1/3, 2/3].$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá na množině M minima v bodě $[2/3, -1/3, 2/3]$ a maxima nabývá v prvních dvou podezřelých bodech.

Příklad F: Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o elipsu), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme nejprve podezřelé body uvnitř množiny M . Pro parciální derivace funkce f platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y). \end{aligned}$$

Uvnitř množiny M hledáme ty body, kde jsou obě parciální derivace nulové. To jsou právě ty body z M , které splňují

$$\begin{aligned} 2x(1 - 2(x^2 + 7y^2)) &= 0, \\ 2y(7 - (x^2 + 7y^2)) &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy jsou body $[0, 0]$, $[1/\sqrt{2}, 0]$, $[-1/\sqrt{2}, 0]$, $[0, 1]$, $[0, -1]$, pouze první tři však leží uvnitř množiny M .

Podezřelé body na hranici M hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina $H(M)$ je určena pomocí vazebné funkce

$$g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1.$$

Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 8y.$$

Vektor $(2x, 8y)$ je nulový, právě když $[x, y] = [0, 0]$. Tento bod ovšem neleží na hranici množiny M . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x) = 2\lambda x, \\ (2) \quad & 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y) = 8\lambda y, \end{aligned}$$

Z (1) vyplývá, že $x = 0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(1 - 2(x^2 + 7y^2)) = \lambda$ a z (2) vyplývá, že $y = 0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(7 - (x^2 + 7y^2)) = 4\lambda$. Pokud $x = 0$, pak podle (3) je $y = \pm 1/2$. Pokud $y = 0$, pak podle (3) je $x = \pm 1$. V případě, že $x \neq 0$ a $y \neq 0$, musí být

$$4e^{-(2x^2+y^2)}(1 - 2(x^2 + 7y^2)) = e^{-(2x^2+y^2)}(7 - (x^2 + 7y^2)).$$

Odtud plyne $7(x^2 + 7y^2) = -3$, což je spor.

Nalezli jsme tyto podezřelé body

$$[0, 0], \quad [1/\sqrt{2}, 0], \quad [-1/\sqrt{2}, 0], \quad [0, 1/2], \quad [0, -1/2], \quad [1, 0], \quad [-1, 0].$$

Funkce f nabývá maxima v bodech $[0, 1/2]$, $[0, -1/2]$ a minima v bodě $[0, 0]$.

Příklad G: Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Množina M má prázdný vnitřek.

Podezřelé body hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Funkce f , g_1 i g_2 jsou třídy $C^1(\mathbb{R}^3)$. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= e^{xy}y, & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= e^{xy}x, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 1, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) &= 2z, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) &= -2z. \end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(2x, 2y, -2z)$ jsou lineárně závislé, právě když $z = 0$ nebo $x = y = 0$. Žádný takový bod neleží v množině M . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x, \\ (2) \quad & e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y, \\ (3) \quad & 1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z, \\ (4) \quad & x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (5) \quad & x^2 + y^2 - z^2 = 0. \end{aligned}$$

Z (4) a (5) vyplývá, že $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Odečteme-li (1) od (2) dostaneme

$$e^{xy}(x - y) = -2(\lambda_1 + \lambda_2)(x - y).$$

Z poslední rovnice plyne, že buď $x = y$ nebo $e^{xy} = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$. V prvním případě dopočítáme ze (4) tyto podezřelé body

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Ve druhém případě dosadíme za e^{xy} do (1) a dostaneme

$$-2y(\lambda_1 + \lambda_2) = 2x(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Nyní máme opět dvě možnosti: buď $x = -y$ nebo $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. První možnost dává podezřelé body

$$[1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Druhá možnost spolu s (1) a (2) dává $x = y = 0$. Toto však nemůže nastat vzhledem ke (4) a (5).

Funkce f nabývá maxima v bodech

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}]$$

a minima

$$[-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Příklad H: Položme

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x - y^2 - z^2.$$

Obě funkce jsou spojité a proto je množina M uzavřená. Množina M je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin \mathbb{R}^n vyplývá, že M je kompaktní. Funkce f je spojitá a proto nabývá na M svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že $f, g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2z & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) = 2x & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = 2y & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) = -2y \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y) = 2x + 1 & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y) = 2z & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y) = -2z \end{array}$$

Zkoumejme pro která $[x, y, z] \in M$ jsou vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1, -2y, -2z)$ lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnota následující matice menší než 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x + 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnota této matice je menší než 2, právě když $x = -\frac{1}{2}$ nebo $y = z = 0$. Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v M .

Nyní řešme soustavu:

$$\begin{array}{ll} (1) & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (2) & x = y^2 + z^2 \\ (3) & 2x + 2z = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ (4) & 2y = 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y \\ (5) & 2x + 1 = 2\lambda_1 z - 2\lambda_2 z \end{array}$$

Z (1) a (2) vyplývá $x^2 + x - 1 = 0$, tj. $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Vzhledem k (2) musí být x nezáporné a proto nás zajímá pouze kladný kořen kvadratické rovnice, tj.

$$(6) \quad x = (\sqrt{5} - 1)/2.$$

Z (4) vyplývá, že buď $y = 0$ nebo $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$. V prvním případě vypočteme z (2) a (6), že $z = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$. Odtud dostáváme podezřelé body

$$\left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2} \right], \quad \left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, -\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2} \right].$$

Ve druhém případě plyne z (5) $x + \frac{1}{2} = z$. Takže $z = \sqrt{5}/2$. Z (2) plyne $y^2 = x - z^2$. Po dosazení máme $y^2 = (2\sqrt{5} - 7)/4 < 0$ - což není možné.

Dosazením zjistíme, že funkce f nabývá na M svého maxima v prvním podezřelém bodě a minima ve druhém.

Příklad I: Množina M je uzavřená a omezená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu a uzavřeného prvního kvadrantu) – je tedy kompaktní. Funkce f je spojitá na celém \mathbb{R}^2 a proto musí nabývat maxima i minima na množině M . Zkoumejme chování funkce f nejprve na vnitřku množiny M .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Uvnitř množiny M jsou obě parciální derivace funkce f nenulové, proto uvnitř M není žádný podezřelý bod. Hranici množiny M rozdělme na tři části:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[x, 0]; x \in \langle 0, 1 \rangle\}, \\ H_2 &= \{[0, y]; y \in \langle 0, 1 \rangle\}, \\ H_3 &= \{[x, y]; x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Je-li $[x, y] \in H_1$, platí $f(x, y) = \arctg x$. Funkce \arctg je rostoucí a proto podezřelými body jsou $[0, 0]$ a $[1, 0]$. Podobně je tomu na množině H_2 . Tam dostáváme podezřelé body $[0, 0]$ a $[0, 1]$. Na H_3 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Nechť $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Vidíme, že $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Vektor $(2x, 2y)$ je nulový, právě když $[x, y] = [0, 0]$ – tento bod ovšem neleží v H_3 . Nyní je třeba vyřešit následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 + y^2 = 1 \\ (2) \quad & \frac{1}{1+x^2} = \lambda 2x \\ (3) \quad & \frac{1}{1+y^2} = \lambda 2y \end{aligned}$$

Z (2) a (3) vyplývá

$$(4) \quad \lambda 2x(1+x^2) = \lambda 2y(1+y^2).$$

Z (2) vyplývá, že $\lambda \neq 0$. Proto můžeme (4) upravit na tvar

$$x - y = -(x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Platí tedy buď $x = y$ nebo $-1 = x^2 + xy + y^2$. Druhá možnost však nastat nemůže, neboť prvky z H_3 mají obě souřadnice kladné. První možnost spolu s (1) dává další podezřelý bod $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Nalezli jsme tyto podezřelé body:

$$[0, 0], \quad [0, 1], \quad [1, 0], \quad [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}].$$

Porovnáním funkčních hodnot funkce f v uvedených bodech (provedte podrobně) zjistíme, že f nabývá svého minima v bodě $[0, 0]$ a maxima v bodě $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.