Zadání a řešení písemných testů z Matematiky I a II

FSV 1997-98

Miroslav Zelený

Oldřich John

Ondřej Kalenda

Jan Kolář

Úspěšnost

Zimní semestr

	1	2	3	4	5	celkem	počet
A	68%	70%	73%	54%	45%	59%	23
B	73%	51%	49%	57%	50%	55%	28
C	33%	55%	48%	43%	31%	40%	32
D							
E	17%	39%	29%	30%	46%	35%	14
F	51%	45%	29%	35%	57%	46%	26
G	45%	49%	52%	45%	55%	50%	41
H							
I	21%	54%	41%	25%	32%	34%	18
J	28%	38%	48%	34%	28%	34%	20

Letní semestr

	1	2	3	4	5	celkem	počet
A	72%	54%	88%	65%	51%	65%	5
B	99%	70%	93%	79%	69%	80%	7
C	95%	73%	83%	62%	31%	62%	11
D	90%	53%	73%	66%	59%	67%	43
E	96%	58%	64%	59%	61%	66%	5
F	75%	55%	89%	43%	72%	72%	15
G	63%	46%	51%	39%	58%	51%	8

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (A)

ZS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt[3]{n^3+n}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 4 : Spočtěte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = (x-1)^2|x^2-1|$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad 5 : Vyšetřete průběh funkce (bez konvexity)

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}. \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (A)

ZS 1997-98

Příklad A1 : Nejprve upravíme výraz, jehož limitu máme spočítat.

$$\frac{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt[3]{n^3+n}}$$

$$= \frac{(n^3+n)^{\frac13} - (n^3+1)^{\frac13}}{(n^3+2n)^{\frac13} - (n^3+n)^{\frac13}} \cdot \frac{(n^3+n)^{\frac23} + (n^3+n)^{\frac13}(n^3+1)^{\frac13} + (n^3+1)^{\frac23}}{(n^3+n)^{\frac23} + (n^3+n)^{\frac13}(n^3+1)^{\frac13} + (n^3+1)^{\frac23}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(n^3+2n)^{\frac23} + (n^3+2n)^{\frac13}(n^3+n)^{\frac13} + (n^3+1)^{\frac23}}{(n^3+2n)^{\frac23} + (n^3+2n)^{\frac13}(n^3+n)^{\frac13} + (n^3+1)^{\frac23}}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n^3+2n)^{\frac23} + (n^3+2n)^{\frac13}(n^3+n)^{\frac13} + (n^3+n)^{\frac23}}{(n^3+n)^{\frac23} + (n^3+n)^{\frac13}(n^3+1)^{\frac13} + (n^3+1)^{\frac23}}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(1+\frac{2}{n^2})^{\frac23} + (1+\frac{2}{n^2})^{\frac13}(1+\frac{1}{n^2})^{\frac13} + (1+\frac{1}{n^2})^{\frac23}}{(1+\frac{1}{n^2})^{\frac23} + (1+\frac{1}{n^2})^{\frac13}(1+\frac{1}{n^3})^{\frac13} + (1+\frac{1}{n^3})^{\frac23}}$$

Odtud již vyplývá, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}} = 1.$

Příklad A2 : Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0 < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

Příklad A3 : Platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right).
\end{aligned}$$

Víme, že

(i) $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$,
(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
(iii) $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$,
(iv) sin je prostý na $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$,
(v) $\sqrt{\ }$ je spojitá ve svém definičním oboru.

Z (i), (iii), (iv) a věty o limitě složené funkce plyne $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+\sin x)}{\sin x} = 1.$

Poslední rovnost, spolu s (ii), (v) a větou o limitě součinu dává

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{x} \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right) = 1\cdot 1\cdot 2 = 2.$$

Příklad A4 : Platí

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2(x^2-1), & \text{pro } x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty), \\ 0, & \text{pro } x = \pm 1, \\ (x-1)^2(1-x^2), & \text{pro } x \in (-1,1). \end{cases}$$

Z předchozího plyne

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1)(x^2-1) + (x-1)^2\cdot 2x, & x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty), \\ 2(x-1)(1-x^2) - (x-1)^2\cdot 2x, & x \in (-1,1). \end{cases}$$

Pro jednostranné derivace ve výše uvedených bodech platí $f(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$. Zkoumejme derivaci f v bodě 1. Funkce f je v tomto bodě spojitá a platí

$$\lim_{x\to 1+} f'(x) = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 1-} f'(x) = 0.$$

Což znamená, že $f'(1) = f'_+(1) = f'_-(1) = 0$. Obdobným způsobem zkoumejme derivaci v bodě -1. Funkce f je opět v -1 spojitá a platí

$$\lim_{x \to -1+} f'(x) = 8 \qquad \text{a} \lim_{x \to -1-} f'(x) = -8.$$

Odtud plyne, že $f'_+(-1) = 8$, $f'_-(-1) = -8$ a derivace v -1 neexistuje.

Příklad A5 : Definičním oborem funkce f je množina $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\pi/2;\ k \in \mathbb{Z}\}$; f je sudá a 2π-periodická. Zkoumejme tedy f **pouze** na intervalech $(-\pi/4, \pi/4)$, $(\pi/4, 3\pi/4)$, $(3\pi/4, 5\pi/4)$ a $(5\pi/4, 7\pi/4)$. Spočtěme limity v „krajních bodech“:

$$\lim_{x \to -\pi/4+} f(x) = +\infty, \lim_{x \to \pi/4-} f(x) = +\infty, \lim_{x \to \pi/4+} f(x) = -\infty, \lim_{x \to 3\pi/4-} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 3\pi/4+} f(x) = -\infty, \lim_{x \to 5\pi/4-} f(x) = -\infty, \lim_{x \to 5\pi/4+} f(x) = +\infty, \lim_{x \to 7\pi/4-} f(x) = -\infty.$$

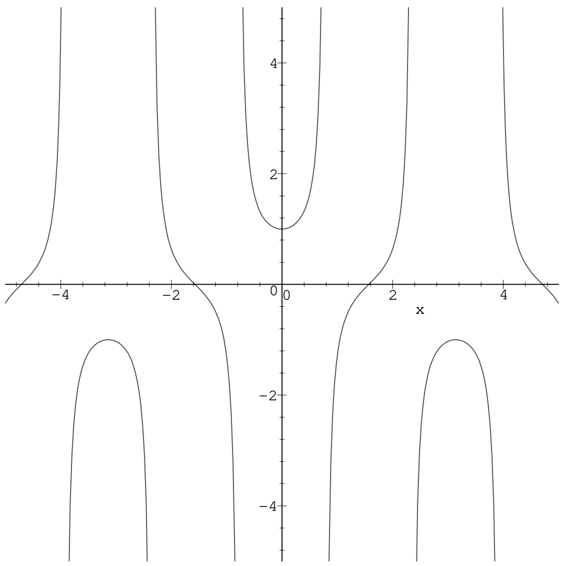
Dále platí:

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cos 2x + 2\cos x \sin 2x}{\cos^2 2x} = \frac{\sin x(1 + 2\cos^2 x)}{\cos^2 2x}, \qquad x \in \mathcal{D}(f).$$

Pro znaménko derivace dostaneme

$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \pi/4) \cup (\pi/4, 3\pi/4) \cup (3\pi/4, \pi), \\ &f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\pi/4, 0) \cup (\pi, 5\pi/4) \cup (5\pi/4, 7\pi/4), \\ &f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pi\}. \end{aligned}$$

Na celém definičním oboru pro funkci f platí: f je rostoucí na intervalech $(0, \pi/4) + 2k\pi$, $(\pi/4, 3\pi/4) + 2k\pi$, $(3\pi/4, \pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; f je klesající na $(-\pi/4, 0) + 2k\pi$, $(\pi, 5\pi/4) + 2k\pi$ a $(5\pi/4, 7\pi/4) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V bodech $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, nabývá funkce f svého lokálního minima a v bodech $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, nabývá funkce f svého lokálního maxima. Globálního minima a globálního maxima funkce f nenabývá. Funkce f nemá asymptotu v $+\infty$ ani v $-\infty$.



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (B)

ZS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+\sin(n+1))(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}). \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1). \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}. \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 4 : Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) funkce

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad 5 : Vyšetřete průběh funkce (bez konvexity)

$$f(x)=(\cos x)e^{\frac{2}{3}\sin x} \qquad (20 \text{ bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (B)

ZS 1997-98

Příklad B1 : Platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1})\\
&=\lim_{n\to+\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1})\cdot\frac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+\sin(n+1)}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin(n+1)}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}.
\end{aligned}$$

Víme, že platí:

(1) $\forall n\in\mathbb{N}: \ |\sin(n+1)|\leq 1$,
(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$,
(3) $\sqrt{\ }$ je spojitá ve svém definičním oboru.

Z (1) a (2) plyne $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n+1)}{n^2} = 0$. Odtud, z (3) a z věty o aritmetice limit plyne

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 + \sin(n+1)) \cdot (\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}) = \frac{1}{2}.$$

Příklad B2 : Použijeme Lebnizova kritéria. Ověřme jeho předpoklady:

(1) řada má požadovaný tvar,
(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{3} - 1) = 0$,
(3) $\forall n \in \mathbb{N} : \ \sqrt[n]{3} - 1 \geq \sqrt[n+1]{3} - 1$ (lze snadno odvodit ze zřejmé nerovnosti $3^{n+1} \geq 3^n, \ n \in \mathbb{N}$).

Řada tedy konverguje.

Příklad B3 : Pišme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}.$$

Víme, že $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$. Zabývejme se teď první limitou ve výše uvedeném součinu limit.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} - \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\arcsin x} \cdot \frac{\arcsin x}{x} = 2 - 1 = 1.$$

Použili jsme

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$,
(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
(3) $\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
(4) sin je prostá funkce na jistém okolí 0,
(5) arcsin je prostá funkce,
(6) $x \mapsto 2x$ je prostá funkce,
(7) větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1),
(8) větu o aritmetice limit.

Dohromady tedy máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

Příklad B4 : Funkce arctg i tg mají derivace všude ve svém definičním oboru. Máme tedy

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^4 x} \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad x \neq \pi/2 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z};$$

po úpravě dostaneme

$$f'(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x}; \qquad x \neq \pi/2 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Platí také $\lim_{x\to\pi/2+k\pi} f(x) = \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$, a f je tedy spojitá v každém bodě tvaru $\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Spočtěme

$$\lim_{x\to\pi/2+k\pi} f'(x) = \lim_{x\to\pi/2+k\pi} \frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 0.$$

Věta o výpočtu derivace pomocí limity derivace tedy dává (předpoklady jsou splněny!) $f'(\pi/2 + k\pi) = 0,\ k \in \mathbb{Z}$.

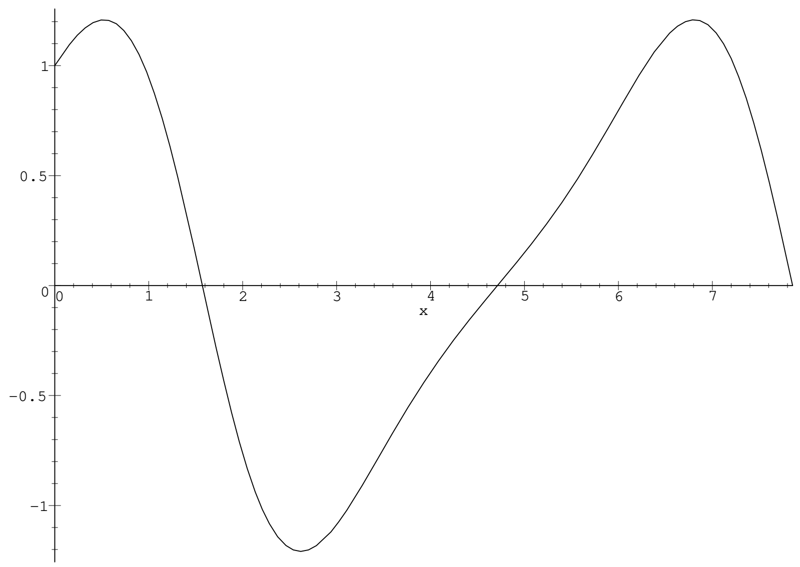
Příklad B5 : Snadno je vidět, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a f je 2π periodická a spojitá na $\mathbb{R}$. Spočtěme f':

$$f'(x) = e^{\frac{2}{3}\sin x}(\frac{2}{3}\cos^2 x - \sin x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Prozkoumáme-li znaménko f' obdržíme:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (5\pi/6, 13\pi/6) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (\pi/6, 5\pi/6) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{\pi/6, 5\pi/6\} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Funkce f je tedy rostoucí na intervalech tvaru $(5\pi/6, 13\pi/6)+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Na intervalech tvaru $(\pi/6, 5\pi/6) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, je f klesající. Funkce f má v bodech $\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, globální maxima a v bodech $5\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, globální minima - toto vyplývá z výše uvedeného; $\mathcal{H}(f) = \langle f(5\pi/6), f(\pi/6)\rangle$. Funkce nemá žádné asymptoty.



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (C)

ZS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{3}{2^n-2n} \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\sin(\frac{\pi}{6}+x)}{\operatorname{tg} x}. \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 4 : Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) funkce

$$f(x)=\max\{\min\{\cos x,(1/2)\},(-1/2)\}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad 5 : Vyšetřete průběh funkce (bez konvexity)

$$f(x)=\frac{\cos x}{\cos 3x}. \qquad (20 \text{ bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (C)

ZS 1997-98

Příklad C1 : Pokusme se nejprve spočítat limitu funkce

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x.$$

Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme:

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x=\exp\left(\log\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x\right)\right)$$

$$=\exp\left(x\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)\right)$$

$$=\exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)$$

$$=\exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{x^4+2x^3}+\sqrt{x^4+1}}{2x^3-1}\right)$$

$$=\exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2-\frac{1}{x^3}}\right). \qquad (\star)$$

Dále platí:

(1) $\lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$,

(2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+2x^3}+\sqrt{x^4+1}}{2x^3-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2x-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{+\infty} = 0$,

(3) funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}$ je na jistém okolí $+\infty$ různá od nuly,

(4) exp je spojitá na $\mathbb{R}$.

Z (1)–(3) a z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}} = 1. \qquad (\star\star)$$

Dále máme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2-\frac{1}{x^3}} = 1. \qquad (\star\star\star)$$

Z $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$ a (4) plyne

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x = e^1 = e$$

a tedy podle Heineho věty

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n = e.$$

Příklad C2 : Pro každé $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$ platí $2^n > 2n$ a proto jsou všechny členy uvažované řady jsou kladné. Můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{3}{2^n - 2n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{2^{n+1}-2(n+1)}}{\frac{3}{2^n-2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{n}{2^{n-1}}}{2-\frac{n+1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

Příklad C3 : Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - 2\sin(\pi/6+x)}{\operatorname{tg} x} &= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x} + \frac{1-2\sin(\pi/6+x)}{x}\right) \\
&= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x} + \frac{1-\cos x}{x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right) \\
&= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x} + \frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right) \\
&= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x} + \frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{1+\cos x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right). \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Víme, že

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$,
(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
(3) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$,
(4) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

Z ($\star$), (1)–(4) a z věty o aritmetice limit vyplývá

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2\sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} = 1 - \sqrt{3}.$$

Příklad C4 : Pro funkci f platí

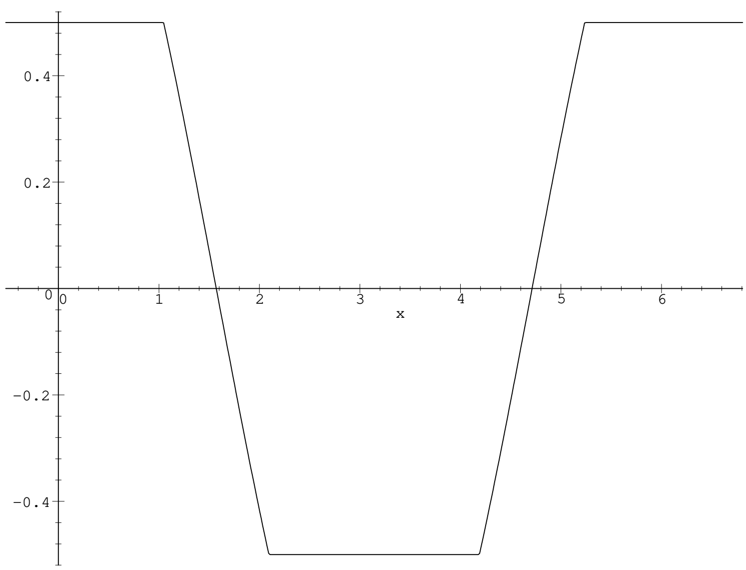
$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & x \in \langle 2\pi/3, 4\pi/3\rangle + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \cos x, & x \in ((\pi/3, 2\pi/3) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 1/2, & x \in \langle -\pi/3, \pi/3\rangle + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Z předchozího vyjádření vyplývá, že

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi/3, \pi/3) + k\ \pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ -\sin x, & x \in (\pi/3, 2\pi/3) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ a proto můžeme podle z předchozího vyjádření vypočítat jednostranné derivace jako příslušné limity derivací:

$$\begin{aligned} f'_+(\pi/3 + 2k\pi) &= \lim_{x\to\pi/3+2k\pi+} -\sin x = -\sin(\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2, \\ f'_-(\pi/3 + 2k\pi) &= \lim_{x\to\pi/3+2k\pi-} 0 = 0, \\ f'_+(2\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_-(2\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(2\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2, \\ f'_+(4\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(4\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2, \\ f'_-(4\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_+(5\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_-(5\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(5\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



Příklad C5 : Platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; \cos 3x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/6 + k\pi/3; k \ \in \mathbb{Z}\}$. Funkce f je ve svém definičním oboru spojitá; f je sudá. Dále máme

$$f(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\cos(3(x+\pi))} = \frac{-\cos x}{\cos(3x+\pi)} = \frac{-\cos x}{-\cos 3x} = \frac{\cos x}{\cos 3x} = f(x).$$

Funkce f je tedy π-periodická. Stačí tedy, když její průběh vyšetříme na množině $(\pi/6, \pi/2) \cup (\pi/2, 5\pi/6) \cup (5\pi/6, 7\pi/6)$. Spočtěme limity v „krajních bodech“:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pi/6+} \frac{\cos x}{\cos 3x} = -\infty,\\
&\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{\cos 3x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{-\sin x}{-3\sin 3x} = -1/3, \ \text{(zde jsme k výpočtu užili}\\
&\qquad\qquad \text{l'Hospitalova pravidla, jehož předpoklady jsou splněny)}\\
&\lim_{x\to5\pi/6+} \frac{\cos x}{\cos 3x} = +\infty,\\
&\lim_{x\to5\pi/6-} \frac{\cos x}{\cos 3x} = -\infty,\\
&\lim_{x\to7\pi/6-} \frac{\cos x}{\cos 3x} = +\infty
\end{aligned}$$

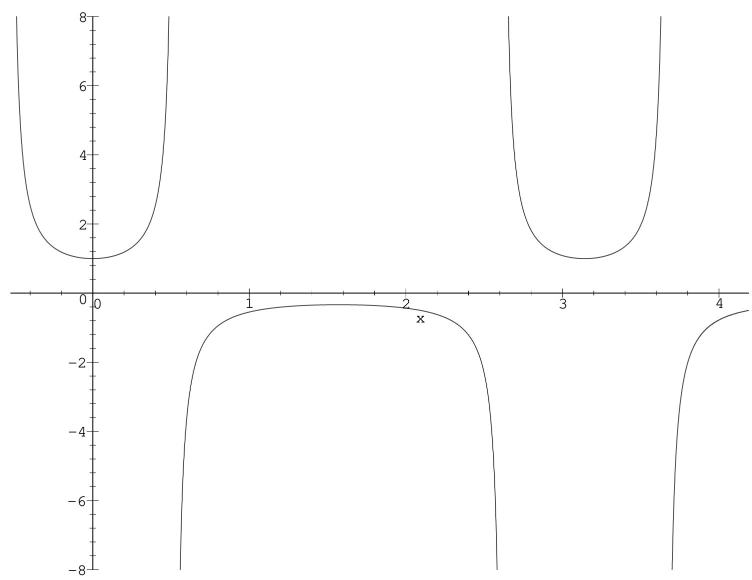
V každém bodě x z definičního oboru f platí

$$f'(x) = \frac{3\cos x \sin 3x - \sin x \cos 3x}{\cos^2 3x}$$

Pro znaménko f' platí

$$\begin{aligned}
&f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ((\pi/6, \pi/2) \cup (\pi, 7\pi/6)) + k\pi, \ k \ \in \mathbb{Z},\\
&f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ((\pi/2, 5\pi/6) \cup (5\pi/6, \pi)) + k\pi, \ k \ \in \mathbb{Z},\\
&f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \ k \ \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Funkce f je tedy rostoucí na intervalech tvaru $(\pi/6, \pi/2) + k\pi$, $(\pi, 7\pi/6) + k\pi$, $k \ \in \mathbb{Z}$; klesající na intervalech tvaru $(\pi/2, 5\pi/6) + k\pi$, $(5\pi/6, \pi) + k\pi$, $k \ \in \mathbb{Z}$. V bodech $k\pi$, $k \ \in \mathbb{Z}$, má f lokální minimum. Globálních extrémů f nenabývá, neboť je zdola i shora neomezená; $\mathcal{H}(f) = (-\infty, -1/3) \cup \langle 1, \infty)$. Funkce f nemá žádné asymptoty.



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (D)

ZS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1). \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 4 : Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) funkce

$$f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad 5 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x)=(\log|x|)^3-3\log|x|. \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (D)

ZS 1997-98

Příklad D1 : Místo limity posloupnosti $\{n(\sqrt[n]{2}-1)\}_{n=1}^{\infty}$ počítejme limitu funkce $f(x)=x(2^{\frac{1}{x}}-1)$ v $+\infty$. Pokud totiž ukážeme, že $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$, pak podle Heineho věty také $\lim_{n\to+\infty} f(n)=A$. Platí

$$\lim_{x\to+\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\log 2}{x}}-1}{\frac{\log 2}{x}}\cdot\log 2=\log 2.$$

Užili jsme

(1) $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$,
(2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log 2}{x}=0$,
(3) $\frac{\log 2}{x}\neq 0$ pro každé $x>0$,
(4) větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1).

Příklad D2 : Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \le 2^n \le 3^n$ a proto má uvažovaná řada pouze kladné členy. Zkusme použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)}{3^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)}}{\frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^{n+1}}}\right)}{\frac{2^n}{3^n}\left(\frac{1+(-1)^n\frac{n}{2^n}}{1+(-1)^n\frac{n}{3^n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^{n+1}}}}{\frac{1+(-1)^n\frac{n}{2^n}}{1+(-1)^n\frac{n}{3^n}}} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Užili jsme následujících faktů:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, kde $a > 1,\ k \in \mathbb{N}$;
(2) posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená.

Z (1) a (2) vyplývá:

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n} = 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^{n+1}} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^{n+1}} = 0.$$

Zbytek vyplývá z věty o aritmetice limit. Naše řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

Příklad D3 : Uvědomme si, že platí:

(1) $\lim_{y\to 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1$,
(2) $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$,
(3) $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$,
(4) $\sqrt{\ }$ je prostá na svém definičním oboru.

Můžeme psát

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})}.$$

Z věty o limitě složené funkce, (1), (3) a (4) plyne

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1.$$

Z věty o limitě složené funkce, (2), (3) a (4) plyne

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1.$$

Věta o aritmetice limit pak dává

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})} = 1.$$

Příklad D4 : Zřejmě $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Platí $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x > 0$. Vzhledem k tomu, že $1 - e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tak pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ máme

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}2x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} = e^{-x^2}\frac{x}{\sqrt{1-e^{x^2}}}.$$

V bodě 0 počítejme derivaci funkce f podle definice:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}.$$

Výpočet poslední limity provedeme nejprve zprava a pak zleva.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}}$$

Uvědomme si, že

(1) $\lim_{y\to 0+}\frac{e^y-1}{y} = 1$,
(2) $\lim_{x\to 0} -x^2 = 0$,
(3) $-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(4) $\sqrt{}$ je spojitá na svém definičním oboru.

Z věty o limitě složené funkce, (1), (2) a (3) plyne $\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2} = 1$. Odtud, z (4) a věty o limitě složené funkce obdržíme

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = 1.$$

Obdobně dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0-} -\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = -1.$$

Derivace funkce f v bodě 0 tedy neexistuje. Platí totiž $f'_+(0) = 1,\ f'_-(0) = -1$.

Příklad D5 : Snadno zjistíme, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkce f je sudá. Zkoumejme tedy funkci f zatím **pouze** na intervalu $(0, +\infty)$. Pak máme $f(x) = (\log x)^3 - 3\log x$.

Spočtěme limity v „krajních bodech“.

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\log x((\log x)^2 - 3) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to 0+}\log x((\log x)^2 - 3) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$$

Pro každé $x > 0$ platí

$$f'(x) = \frac{3}{x}((\log x)^2 - 1) \qquad \text{a} \qquad f''(x) = \frac{3}{x^2}(-(\log x)^2 + 2\log x + 1).$$

Zkoumejme znaménko první derivace:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty)$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{1}{e}, e)$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{1}{e}, e\}.$$

Při zkoumání znaménka f'' stačí zkoumat znaménko výrazu $-(\log x)^2 + 2\log x + 1$.

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (e^{1-\sqrt{2}}, e^{1+\sqrt{2}})$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, e^{1-\sqrt{2}}) \cup (e^{1+\sqrt{2}}, +\infty)$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{e^{1-\sqrt{2}}, e^{1+\sqrt{2}}\}.$$

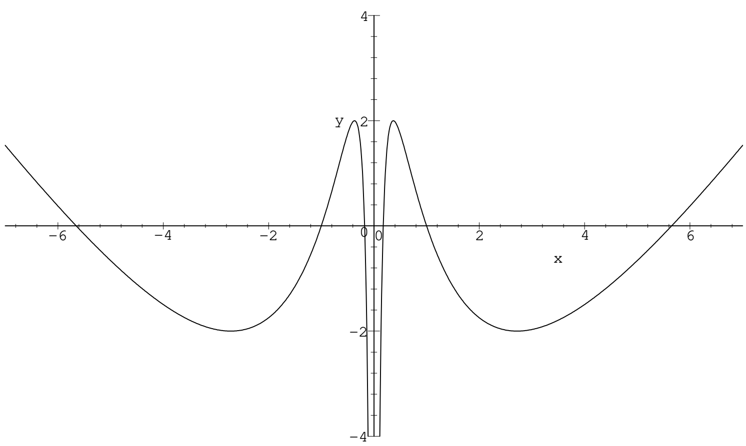
Uvažujme nyní celý definiční obor funkce f. Z předchozího plyne:

• Funkce f je rostoucí na intervalech $(0, \frac{1}{e})$, $(e, +\infty)$, $(-e, -\frac{1}{e})$ a klesající na intervalech $(-\infty, -e)$, $(-\frac{1}{e}, 0)$, $(\frac{1}{e}, e)$. Funkce f má lokální maxima v bodech $\pm\frac{1}{e}$ a lokální minima v bodech $\pm e$. Globálního maxima a globálního minima nenabývá.

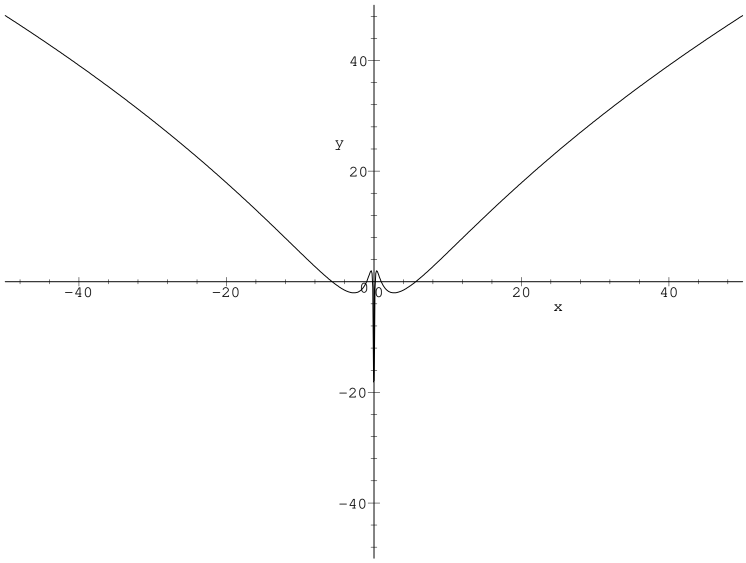
• Funkce f je konvexní na intervalech $(-e^{1+\sqrt{2}}, -e^{1-\sqrt{2}})$, $(e^{1-\sqrt{2}}, e^{1+\sqrt{2}})$ a konkávní na intervalech $(-\infty, -e^{1+\sqrt{2}})$, $(-e^{1-\sqrt{2}}, 0)$, $(0, e^{1-\sqrt{2}})$, $(e^{1+\sqrt{2}}, +\infty)$. Body $\pm e^{1+\sqrt{2}}$, $\pm e^{1-\sqrt{2}}$ jsou inflexními body f.

Vzhledem k tomu, že $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ f nemá asymptotu v $+\infty$. Ze sudosti f vyplývá, že f nemá asymptotu ani v $-\infty$.

Takto vypadá graf funkce f:



Graf f v trochu jiném pohledu:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (E)

ZS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+2^n)}{\sqrt[3]{n^3+n^2}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}) \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2^x + 8^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 4 : Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) funkce

$$f(x) = \arccos \frac{1}{1+x^2}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad 5 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x). \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (E)

ZS 1997-98

Příklad E1 : Počítejme:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+2^n)}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(2^n(1+\frac{1}{2^n}))}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\log 2 + \log(1+\frac{1}{2^n})}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\log 2}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{2^n})}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log 2}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{2^n})}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} \\
&= \log 2 + \frac{0}{+\infty} = \log 2.
\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme, mimo jiné, použili větu o aritmetice limit a spojitost logaritmu.

Příklad E2 : Označme $a_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}$. Platí:

$$a_n > 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ a } a_n = \frac{2}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}} < \frac{2}{n^{3/2}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ konverguje a proto podle srovnávacího kritéria konverguje i vyšetřovaná řada.

Příklad E3 : Pišme

$$\left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\cdot\log\left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)\right).$$

Spočítejme nejprve limitu

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\log(\frac{2^x+8^x}{2})}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\log(\frac{2^x+8^x}{2})}{\frac{2^x+8^x}{2}-1}\cdot\frac{2^x+8^x-2}{2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\log(\frac{2^x+8^x}{2})}{\frac{2^x+8^x}{2}-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2^x+8^x-2}{2x} = 1\cdot\log 4.
\end{aligned}$$

Při výpočtu první limity jsme využili

(1) $\lim_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1} = 1$,
(2) výraz $\frac{2^x+8^x}{2}$ je na jistém okolí 0 různý od 1,
(3) větu o limitě složené funkce.

Rovnost

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+8^x-2}{2x} = \log 4$$

je možno odvodit pomocí l'Hospitalova pravidla nebo také takto:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{2^x+8^x-2}{2x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{2^x-1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{8^x-1}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{x\log 2}-1}{x\log 2}\cdot\log 2 + \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{x\log 8}-1}{x\log 8}\cdot\log 8\\
&= \frac{1}{2}(\log 2+\log 8) = \log 4.
\end{aligned}$$

Zde jsme užili větu o limitě složené funkce, známou limitu $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1$, prostotu zobrazení $x\mapsto x\log 2$, $x\mapsto x\log 8$ (viz podmínka (P1) ve větě o limitě složené funkce) a větu o aritmetice limit.

Předchozí výpočty spolu se spojitostí exponenciály dávají

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 4.$$

Příklad E4 : Zkoumaná funkce je definována na celém $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Je-li $x \neq 0$, můžeme $f'(x)$ vypočítat pomocí věty o derivaci složené funkce:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\,\mathrm{sgn}\,x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}.$$

V 0 vypočítáme jednostranné derivace pomocí limity derivace (předpoklady příslušné věty jsou splněny):

$$
\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\\
f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} \frac{2\operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

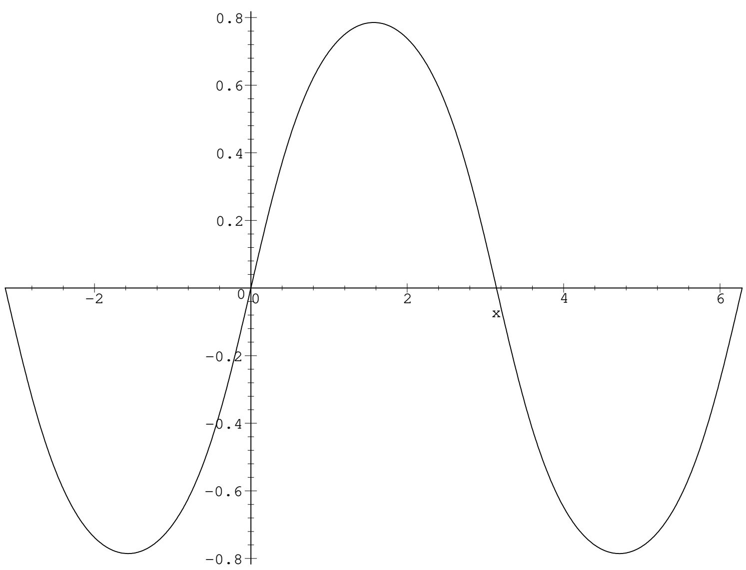
V 0 tedy derivace neexistuje.

Příklad E5 : Platí: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$, 2π-periodická a lichá. Spočtěme derivace a zkoumejme jejich znaménka:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}, \qquad x \in \mathbb{R},\\
f''(x) &= -\sin x \cdot \frac{1+\sin^2 x + 2\cos^2 x}{(1+\sin^2 x)^2}, \qquad x \in \mathbb{R};\\
f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-\pi/2, \pi/2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\\
f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (\pi/2, 3\pi/2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},\\
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\\
f''(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\\
f''(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (0, \pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},\\
f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Z výše uvedeného vyplývá, že f je rostoucí na intervalech tvaru $(-\pi/2, \pi/2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, klesající na intervalech tvaru $(\pi/2, 3\pi/2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; v bodech $\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, má f globální maxima a v bodech $3\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, má f globální minima. Funkce f je na intervalech $(0, \pi) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, konkávní a na intervalech tvaru $(\pi, 2\pi) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, konvexní, v bodech $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, má f inflexní body; $\mathcal{H}(f) = \langle -\pi/4, \pi/4 \rangle$; f nemá žádné asymptoty.

Takto vypadá graf funkce f:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (F)

ZS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Nalezněte $a,\ b \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3 + x} - ax - b = 0. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 4 : Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad 5 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^x. \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (F)

ZS 1997-98

Příklad F1 : Spočítejme nejprve tuto limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}.$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{1 + \sqrt{\frac{\sqrt[n]{n}}{n^6}}} = 1.$$

Zde jsme využili větu o aritmetice limit a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Z výše uvedeného a věty o limitě vybrané posloupnosti vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^3 \sqrt[2n]{2n}}{(2n)^3 + \sqrt[4n]{2n}} = 1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty} -\frac{(2n+1)^3 \sqrt[2n+1]{2n+1}}{(2n+1)^3 + \sqrt[4n+2]{2n+1}} = -1.$$

To znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$ neexistuje.

Příklad F2 : Funkce arctg je ve svém definičním oboru rostoucí a proto

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ 0 < \operatorname{arctg} 1 \le \operatorname{arctg} n$$

a také

$$(\star) \qquad \forall n \in \mathbb{N}:\ 0 < \frac{\operatorname{arctg} 1}{n} \le \frac{\operatorname{arctg} n}{n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje a proto diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 1}{n}$. Odtud, z $(\star)$ a ze srovnávacího kritéria dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$ diverguje.

Příklad F3 : Zde nejde o nic jiného, než o určení asymptoty k funkci $x \mapsto \sqrt[3]{x^3+x}$ v $+\infty$. Počítejme:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x}}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}} = 1 \quad (= a);\\
\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x} - x &= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+x} - x)\cdot \frac{(x^3+x)^{\frac{2}{3}} + (x^3+x)^{\frac{1}{3}}x + x^2}{(x^3+x)^{\frac{2}{3}} + (x^3+x)^{\frac{1}{3}}x + x^2}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x^3+x)^{\frac{2}{3}} + (x^3+x)^{\frac{1}{3}}x + x^2}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} + (x^3+x)^{\frac{1}{3}} + x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad (= b).
\end{aligned}$$

Řešením úlohy jsou čísla $a = 1$ a $b = 0$.

Příklad F4 : Pro $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = 2x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) + x^2(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}).$$

Tento vztah vyplývá z věty o aritmetice derivací a věty o derivaci složené funkce. V bodě 0 počítejme derivaci z definice, tj. počítejme limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) = 0,$$

neboť $\lim_{x\to 0} x = 0$ a funkce $x \mapsto (\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})$ je omezená na jistém prstencovém okolí bodu 0. Platí tedy $f'(0) = 0$.

Příklad F5 : Snadno zjistíme $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a f je na $\mathbb{R}$ spojitá; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Funkce f není lichá, není sudá a není periodická. Pro f' platí

$$f'(x) = (x^2+4x+3)e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pro znaménko f' máme

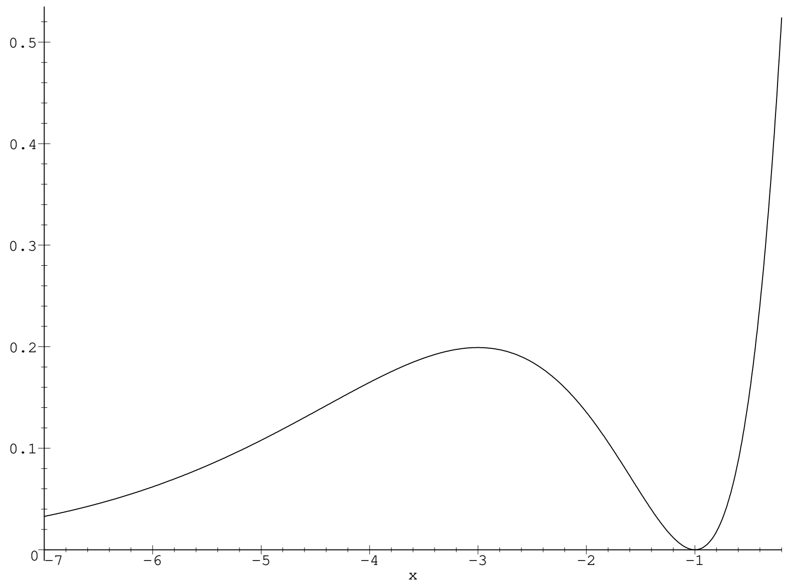
$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty), \\ f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (-3, -1), \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{-3, -1\}. \end{aligned}$$

Zabývejme se ještě druhou derivací f a jejím znaménkem:

$$\begin{aligned} f''(x) = (x^2 + 6x + 7)e^x, &\qquad x \in \mathbb{R}; \\ f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3 - \sqrt{2}) \cup (-3 + \sqrt{2}, \infty), \\ f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2}), \\ f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2}\}. \end{aligned}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f je rostoucí na intervalech $(-\infty, -3)$ a $(-1, +\infty)$; f je klesající na intervalu $(-3, -1)$; v bodě -3 má lokální maximum a v bodě -1 globální minimum; globálního maxima se nenabývá; $\mathcal{H}(f) = \langle 0, +\infty)$. Funkce f je na intervalech $(-\infty, -3 - \sqrt{2})$, $(-3 + \sqrt{2}, +\infty)$ konvexní a na intervalu $(-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2})$ je konkávní. Body $-3 - \sqrt{2}$, $-3 + \sqrt{2}$ jsou inflexními body f. Funkce f má v $-\infty$ za asymptotu funkci $x \mapsto 0$ a v $+\infty$ f asymptotu nemá.

Toto je graf funkce f:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (G)

ZS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)\sqrt{n+7}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 4 : Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = x^{(x^x)}$$

pro každé $x > 0$. (10 bodů)
Příklad 5 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - x. \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (G)

ZS 1997-98

Příklad G1 : Platí:

$$\begin{aligned}(n+4)^{100}-(n+3)^{100} &= \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}4^j - \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}3^j \\ &= \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}(4^j-3^j) = 100n^{99}+P_1(n); \\ (n+2)^{100}-n^{100} &= 200n^{99}+P_2(n),\end{aligned}$$

kde $P_1,\ P_2$ jsou polynomy stupně ostře menšího než 99. Pro tyto polynomy tedy platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_1(n)}{n^{99}} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{P_2(n)}{n^{99}} = 0.$$

Dostáváme tak:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}} = \lim_{n\to\infty} \frac{100+\frac{P_1(n)}{n^{99}}}{200+\frac{P_2(n)}{n^{99}}} = 1/2.$$

Příklad G2 : Použijeme Leibnizova kritéria:

- řada má požadovaný tvar, neboť $\cos(n\pi) = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$ a
$$c_n = \frac{\sqrt{n+7}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} > 0;$$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+7}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{7}{n}}}{\sqrt{n+1}} = 0$ (použili jsme větu o aritmetice limit a také spojitost odmocniny);
- nerovnost $c_n \geq c_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$, je ekvivalentní s nerovností $(n+7)(n+2) \geq (n+8)n,\ n \in \mathbb{N}$; poslední nerovnost platí, jak se lze snadno přesvědčit po roznásobení.

Naše řada tedy konverguje podle Leibnizova kritéria.

Příklad G3 : Upravme nejprve výraz jehož limitu máme spočítat, přitom budeme předpokládat, že $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} &= \frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}.
\end{aligned}$$

Výraz $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ je pro $x > 0$ různý od 0 a

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0.$$

Použijeme-li známou limitu $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ a větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1), dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = 1.$$

Věta o aritmetice limit potom dává:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Příklad G4 : Spočtěme nejprve

$$(x^x)' = (e^{x \log x})' = e^{x \log x}\left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1), \qquad x > 0.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned}\left(x^{(x^x)}\right)' &= \left(e^{x^x \log x}\right)' = e^{x^x \log x}\left((x^x)' \cdot \log x + x^x \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= x^{(x^x)}\left(x^x(\log x + 1)\log x + x^{x-1}\right), \qquad x > 0.\end{aligned}$$

Při výpočtech jsme využili větu o derivaci složené funkce, větu o derivaci součinu a faktu, že derivované funkce mají ve svých definičních oborech vlastní derivace.

Příklad G5 : Platí: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; f je spojitá na $\mathbb{R}$; f je lichá a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Spočítejme první a druhou derivaci f a zkoumejme jejich znaménko:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1, \qquad x \in \mathbb{R}; \qquad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

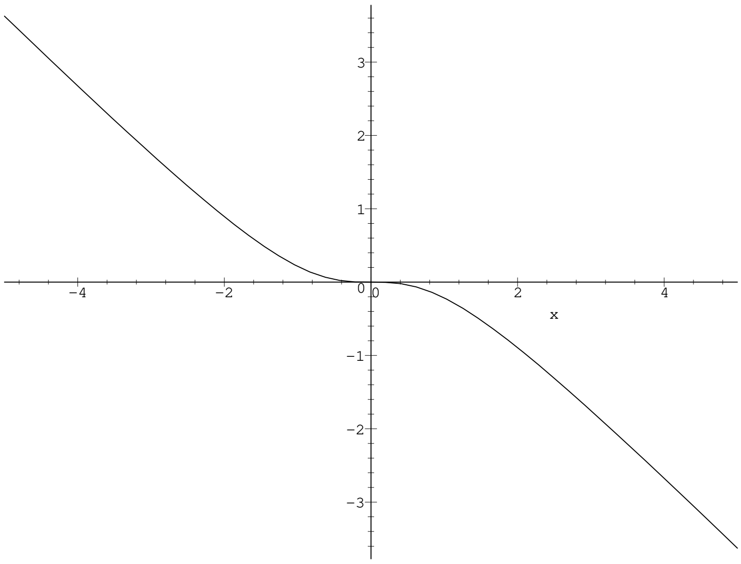
$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0; \\ f''(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (0, +\infty), \\ f''(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0), \\ f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f je klesající na $\mathbb{R}$ a nemá žádné extrémy; f je konvexní na intervalu $(-\infty, 0)$, konkávní na $(0, +\infty)$ a 0 je inflexním bodem; $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$. Spočítejme ještě asymptoty f:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1\right) = -1, \\ \lim_{x\to+\infty}(f(x) + x) &= \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2; \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1\right) = -1, \\ \lim_{x\to-\infty}(f(x) + x) &= \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2. \end{aligned}$$

Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $y = -x + \pi/2$ a v $-\infty$ má asymptotu $y = -x - \pi/2$.

Toto je graf funkce f:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (H)

ZS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arctg}(\arcsin x))}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 4 : Nalezněte $A,\ B,\ C\ \in \mathbb{R}$, aby

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4} \log \frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right)' = \frac{A\cos x + B\sin x}{C + \cos 2x}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 5 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi x}{4x^2+2}\right)\right) \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (H)

ZS 1997-98

Příklad H1 : Víme, že pro $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^k} = +\infty$. Odtud plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :\ n^2 \leq n^3 \leq n^4 \leq 2^n \leq 3^n \leq 4^n.$$

Platí tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :\ 4 \leq \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n} \leq 4\sqrt[n]{6}.$$

Víme, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6} = 1$ a proto podle věty o dvou policajtech dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n} = 4.$$

Příklad H2 : Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n^5}{5^n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}}{\frac{n^5}{5^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = \frac{1}{5} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

Příklad H3 : Víme

(1) $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
(2) $\lim_{x\to0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$,
(3) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$,
(4) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$,
(5) $\lim_{x\to0} \operatorname{tg} x = 0$,
(6) $\lim_{x\to0} \arcsin x = 0$,
(7) tg je prostý na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
(8) arcsin je prostý na $\langle -1, 1\rangle$.

Pišme

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arctg}(\arcsin x)} = \lim_{x\to0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\frac{\operatorname{tg} x}{x}\frac{x}{\arcsin x}\frac{\arcsin x}{\operatorname{arctg}(\arcsin x)} = 1,$$

neboť platí (2), (4), $\lim_{x\to0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = 1$ (podle věty o limitě složené funkce, (1), (5) a (7)) a také $\lim_{x\to0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{arctg}(\arcsin x)} = 1$ (podle věty o limitě složené funkce, větě o limitě podílu funkcí, (3), (6) a (8)).

Příklad H4 : Spočtěme nejprve derivaci na levé straně rovnosti. Po úpravě dostaneme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4}\log\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right)' = \frac{2\cos x - 4\sin x}{7+\cos 2x}.$$

Při úpravách je třeba užít vzorečku $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$. Stačí tedy volit $A = 2$, $B = -4$, $C = 7$.

Příklad H5 : Položme $g(x) = \dfrac{3\pi x}{4x^2+2}$. Vyšetřeme nejprve průběh funkce g. Platí: $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$. Funkce g je lichá a spojitá na $\mathbb{R}$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$g'(x) = 6\pi\frac{1-2x^2}{(4x^2+2)^2}, \qquad g''(x) = 6\pi\frac{x(2x^2-3)}{(2x^2+1)^3}.$$

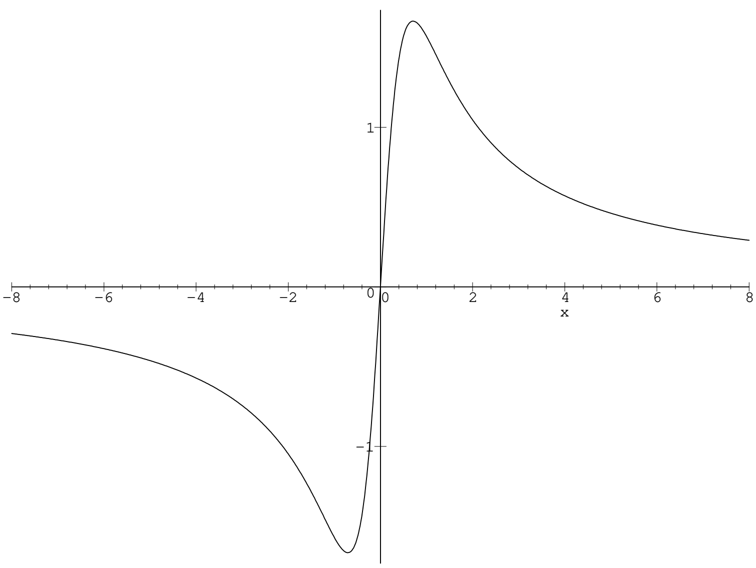
$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),$$
$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty),$$
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Funkce g je na intervalech $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ klesající. Na intervalu $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ rostoucí. V bodě $\frac{1}{\sqrt{2}}$ je globální maximum funkce g, v bodě $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ je globální minimum funkce g. Platí také $\mathcal{H}(g) = \langle g(-\frac{1}{\sqrt{2}}), g(\frac{1}{\sqrt{2}})\rangle = \langle -\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\rangle$.

$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty),$$
$$g''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \cup (0, \sqrt{\frac{3}{2}}),$$
$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \sqrt{\frac{3}{2}},\ -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Funkce g je konvexní na intervalech $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$, $(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$. Funkce g je konkávní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$, $(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$. Body 0, $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ jsou inflexními body funkce g.

Graf funkce g vypadá takto:



Vraťme se nyní k funkci f. Všimněme si, že $\mathcal{H}(g) \subset \langle -\pi, \pi\rangle$ a

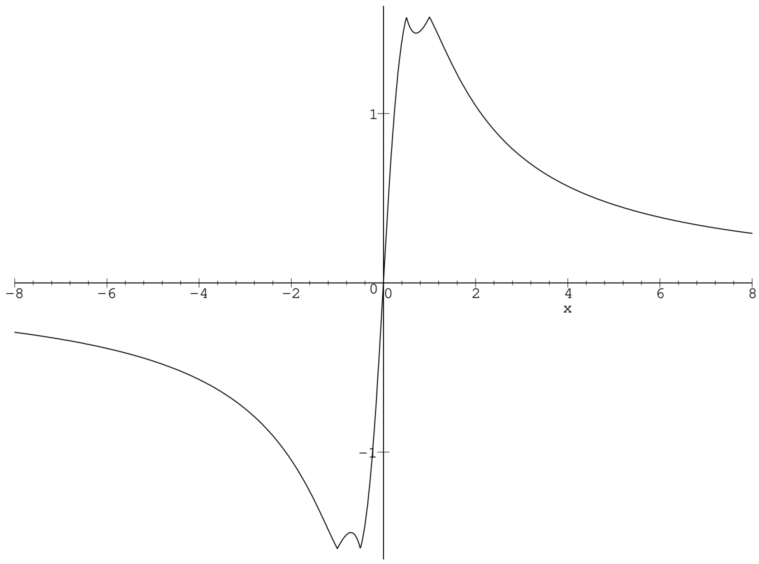
$$g(x) \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle 1, \infty).$$

Platí proto:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - g(x), & x \in (-1, -\frac{1}{2}) \\ g(x), & x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle 1, \infty) \\ \pi - g(x), & x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Nyní je snadné zjistit, že funkce f je rostoucí na intervalech $(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$; f je klesající na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(1, +\infty)$; v bodech $\frac{1}{2}$, 1 má f globální maximum; v bodech $-\frac{1}{2}$, -1 má f globální minimum; v bodě $\frac{1}{\sqrt{2}}$ má f lokální minimum a v bodě $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ lokální maximum; f je konvexní na intervalech $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 1)$, $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$, $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -1)$; f je konkávní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$, $(-1, -\frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2})$, $(1, \sqrt{\frac{3}{2}})$; body 0, $\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}$ jsou inflexními body funkce f.

Toto je graf funkce f:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (I)

ZS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2+n+1)-\log(n^2+n)}{\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+4^n}{4^n+5^n}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{e^{x^3}-1}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 4 : Spočtěte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = \max\{x + 4\,\mathrm{arctg}(\sin x), x\}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)
Příklad 5 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = (x-1)\exp\left(\frac{x}{1+x}\right). \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (I)

ZS 1997-98

Příklad I1 : Výraz jehož limitu máme spočítat nejprve upravíme:

$$\begin{aligned}
\frac{\log(n^2+n+1)-\log(n^2+n)}{\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}} &= \frac{\log(1+\frac{1}{n^2+n})}{\frac{1}{n^2+n}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2+n}}{1} \cdot (\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}) \\
&= \frac{\log(1+\frac{1}{n^2+n})}{\frac{1}{n^2+n}} \cdot \frac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}{n^2+n} \\
&= \frac{\log(1+\frac{1}{n^2+n})}{\frac{1}{n^2+n}} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}{1+\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že platí

(1) $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$,
(2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+n} = 0$,
(3) $\frac{1}{n^2+n} \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

můžeme podle věty o limitě složené funkce a Heineho věty psát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n^2+n})}{\frac{1}{n^2+n}} = 1.$$

Z věty o aritmetice limit a spojitosti odmocniny plyne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}{1+\frac{1}{n}} = 2.$$

Dohromady pak máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2+n+1)-\log(n^2+n)}{\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}} = 2.$$

Příklad I2 : Členy uvažované řady jsou kladné a použijeme-li podílové kritérium, dostaneme:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}+4^{n+1}}{4^{n+1}+5^{n+1}} \cdot \frac{4^n+5^n}{3^n+4^n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{4^n}+4}{\frac{4^{n+1}}{5^n}+5} \cdot \frac{\frac{4^n}{5^n}+1}{\frac{3^n}{4^n}+1} = \frac{4}{5} < 1.$$

Zkoumaná řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

Příklad I3 : Limita čitatele a jmenovatele je rovna 0 a funkce ve jmenovateli i čitateli mají v každém bodě vlastní derivaci. Pokusme se tedy použít l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{e^{x^3}-1} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{e^{x^3}\cdot 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^{x^3}\cdot 3x} = \frac{1}{3}.$$

Vzhledem k tomu, že limita podílu derivací existuje, tak je i první rovnost v předchozím výpočtu v pořádku a výsledek je roven 1/3.

Příklad I4 : Pro hodnoty funkce f platí

$$f(x) = \begin{cases} x + 4\,\mathrm{arctg}(\sin x), & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}, \\ x, & x \in \langle (2k+1)\pi, (2k+2)\pi \rangle,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

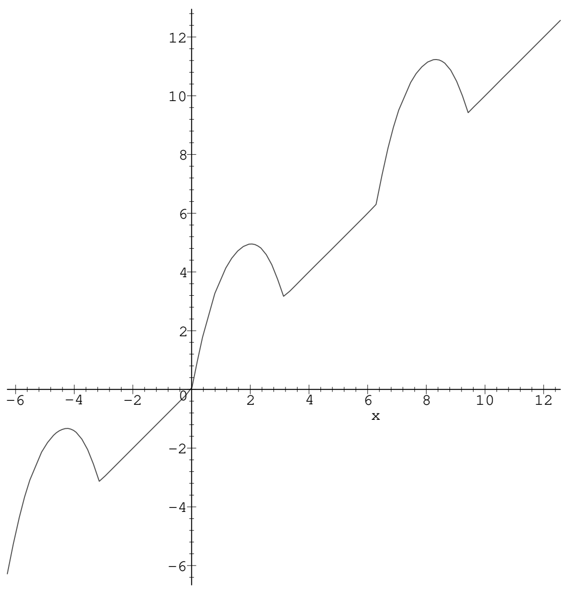
Odtud již můžeme vypočítat hodnotu derivace všude mimo body ve tvaru $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}, \\ 1, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je na $\mathbb{R}$ spojitá a jednostranné derivace v bodech $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, lze tedy počítat pomocí limit derivací:

$$\begin{aligned}
f'_+(2k\pi) &= \lim_{x\to 2k\pi+} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi+} \left(1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) = 5,\\
f'_-(2k\pi) &= \lim_{x\to 2k\pi-} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi-} 1 = 1,\\
f'_-((2k+1)\pi) &= \lim_{x\to (2k+1)\pi-} f'(x) = \lim_{x\to (2k+1)\pi-} \left(1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) = -3,\\
f'_+((2k+1)\pi) &= \lim_{x\to (2k+1)\pi+} f'(x) = \lim_{x\to (2k+1)\pi+} 1 = 1.
\end{aligned}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f v bodech tvaru $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, nemá derivaci.



Příklad I5 : Platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1+} f(x) = 0$. Funkce f je spojitá na $\mathcal{D}(f)$, ale není sudá, ani lichá, ani periodická. Spočtěme f' a f'' a prozkoumejme jejich znaménko:

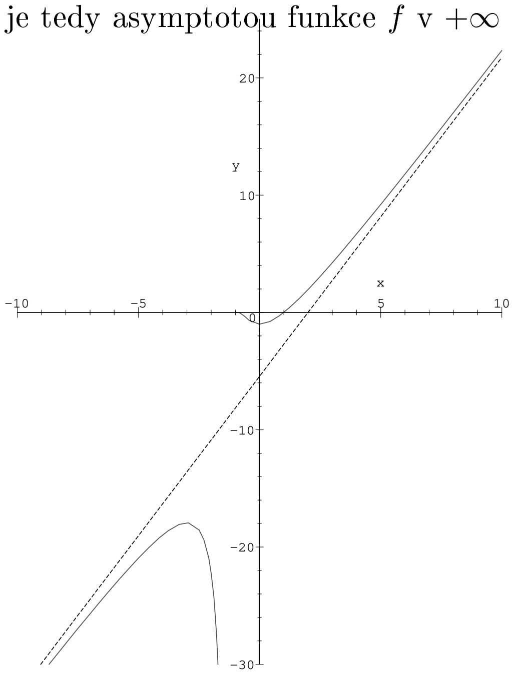
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x(3+x)}{(1+x)^2}\exp(x/(1+x)), \qquad x \in \mathcal{D}(f);\\
f''(x) &= \frac{5x+3}{(1+x)^4}\exp(x/(1+x)), \qquad x \in \mathcal{D}(f);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty),\\
f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (-3, -1) \cup (-1, 0),\\
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{-3, -1\};\\
f''(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (-3/5, \infty),\\
f''(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -3/5),\\
f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{-3/5\}.
\end{aligned}$$

Funkce f je tedy rostoucí na intervalech $(-\infty, -3)$ a $(0, +\infty)$; klesající na intervalech $(-3, -1)$ a $(-1, 0)$. V bodě -3 má f lokální maximum a v bodě 0 má lokální minimum. Globálních extrémů funkce f nenabývá. Funkce f je konkávní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, -3/5)$; na intervalu $(-3/5, +\infty)$ je konvexní; bod $-3/5$ je inflexním bodem. Pro obor hodnot platí: $\mathcal{H}(f) = (-\infty, -4\exp(3/2)\rangle \cup \langle -1, +\infty)$. Určeme ještě asymptoty:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x}\exp\left(\frac{x}{1+x}\right) = e,\\
&\lim_{x\to+\infty} \left\{(x-1)\exp\left(\frac{x}{1+x}\right) - ex\right\}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \left\{ex\left(\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) - 1\right) - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \left\{\frac{-ex}{1+x}\cdot\frac{\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right)-1}{-\frac{1}{1+x}} - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\} = -2e,\\
&\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x}\exp\left(\frac{x}{1+x}\right) = e,\\
&\lim_{x\to-\infty} \left\{(x-1)\exp\left(\frac{x}{1+x}\right) - ex\right\}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \left\{ex\left(\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) - 1\right) - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \left\{\frac{-ex}{1+x}\cdot\frac{\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right)-1}{-\frac{1}{1+x}} - \exp\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\} = -2e
\end{aligned}
$$

Funkce $y = ex - 2e$ je tedy asymptotou funkce f v $+\infty$ i $-\infty$. Zde je graf funkce f:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (J)

ZS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}(n^4+(-1)^n n^2)\sin\left(\frac{n+1}{n^5}\right). \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 4 : Spočtěte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x)=\max\{x^3-1, x^3+x\}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad 5 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-3}\right)+|x|. \qquad \text{(20 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (J)

ZS 1997-98

Příklad J1 : Výraz jehož limitu máme spočítat nejprve upravíme:

$$\begin{aligned}(n^4+(-1)^n n^2)\sin\left(\frac{n+1}{n^5}\right) &= \frac{n^4+(-1)^n n^2}{n^4}\cdot\frac{n^4}{\frac{n^5}{n+1}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n+1}{n^5}\right)}{\frac{n+1}{n^5}}\\ &= \left(1+(-1)^n\frac{1}{n^2}\right)\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n+1}{n^5}\right)}{\frac{n+1}{n^5}}.\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že platí

(1) $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$,
(2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^5}=0$,
(3) $\frac{n+1}{n^5}\neq 0$ pro každé $n\in\mathbb{N}$,

můžeme podle věty o limitě složené funkce a Heineho věty psát

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{n^5}\right)}{\frac{n+1}{n^5}} = 1.$$

Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, proto $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2} = 0$. Dohromady pak máme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n^4 + (-1)^n n^2)\sin\left(\frac{n+1}{n^5}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + (-1)^n \frac{1}{n^2}\right)\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n+1}{n^5}\right)}{\frac{n+1}{n^5}}\\ &= 1\cdot 1\cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

Příklad J2 : Platí následující odhad:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left|(-1)^n \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Zkoumaná řada je absolutně konvergentní a tedy konvergentní – toto plyne ze srovnávacího kritéria a faktu, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ je konvergentní.

Příklad J3 : Limita čitatele a jmenovatele je rovna 0 a funkce ve jmenovateli i čitateli mají v jistém prstencovém okolí nuly vlastní derivaci. Pokusme se tedy použít l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\frac{\sin x}{x}}{x^2} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\cos x\cdot x - \sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{2x^3}.$$

Limitu druhého činitele zkusme spočítat opět podle l'Hospitalova pravidla (předpoklady jsou splněny!):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{2x^3} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{6x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = -1/6.$$

Vzhledem k tomu, že limita podílu derivací existuje, tak je i první rovnost v předchozím výpočtu v pořádku. Totéž lze říci o prvním použití l'Hospitalova pravidla a dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\frac{\sin x}{x}}{x^2} = -1/6.$$

Příklad J4 : Pro hodnoty funkce f platí

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \in (-\infty, -1),\\ x^3 + x, & x \in \langle -1, +\infty).\end{cases}$$

Odtud již můžeme vypočítat hodnotu derivace všude kromě bodu -1:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in (-\infty, -1),\\ 3x^2 + 1, & x \in (-1, +\infty).\end{cases}$$

Funkce f je na $\mathbb{R}$ spojitá a jednostranné derivace v bodě -1 lze tedy počítat pomocí limit derivací:

$$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1+} f'(x) = \lim_{x\to -1+} (3x^2+1) = 4,$$
$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1-} f'(x) = \lim_{x\to -1-} 3x^2 = 3.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f v bodě -1 nemá derivaci.

Příklad J5 : Platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 3-} f(x) = -\pi/2 + 3$, $\lim_{x\to 3+} f(x) = \pi/2 + 3$. Funkce f je spojitá na $\mathcal{D}(f)$, ale není sudá, ani lichá, ani periodická.

Spočtěme f' všude, kde existuje:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-6x+9}{x^2-6x+10}, & x \in (0,3) \cup (3,+\infty); \\ -\frac{x^2-6x+11}{x^2-6x+10}, & x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Funkce f je v bodě 0 spojitá a proto tam můžeme počítat derivaci pomocí limity derivace:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2-6x+9}{x^2-6x+10} = \frac{9}{10},$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} -\frac{x^2-6x+11}{x^2-6x+10} = \frac{-11}{10}.$$

V bodě 0 tedy f nemá derivaci. Pro znaménko derivace platí:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,3) \cup (3,+\infty),$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0).$$

Funkce f je tedy na intervalu $(-\infty, 0)$ klesající a na množině $(0,3) \cup (3,\infty)$ je rostoucí (viz výpočet limit v bodě 3!). V bodě 0 má f globální minimum. Globálního maxima nenabývá.

Spočtěme f'':

$$f''(x) = \frac{2x-6}{(x^2-6x+10)^2},\ x \in (-\infty,0) \cup (0,3) \cup (3,\infty).$$

Pro znaménko f'' platí

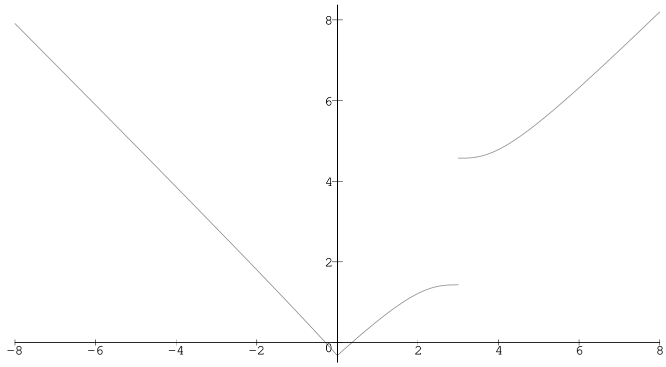
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (3,+\infty),$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0) \cup (0,3).$$

Funkce f je konkávní na intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,3)$; na intervalu $(3,+\infty)$ je konvexní. Pro obor hodnot platí: $\mathcal{H}(f) =\rangle \operatorname{arctg}(-1/3), +\infty)$. Určeme ještě asymptoty:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)/x = -1, \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = 0.$$

Funkce $y = x$ je tedy asymptotou funkce f v $+\infty$ a funkce $y = -x$ je asymptotou v $-\infty$.

Zde je graf funkce f:



Písemná zkouška z matematiky pro FSV (A)

LS 1997-98

Příklad 1 : Najděte řešení soustavy rovnic a spočtěte determinant soustavy.

$$\begin{aligned} x+2y+3z+4t&=1\\ 2x-2y+3z-3t&=-5\\ x+\ y+\ z+\ t&=5\\ 4x+3y-5z+2t&=3 \end{aligned}. \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[0,1]$;

$$f(x,y)=\sqrt{y+\sin x}. \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\sin(xy)+\cos(xy)=1$$

určuje v jistém okolí bodu $[\pi,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě π. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y)=x^4y \qquad M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^4+y^4\le 16, x\ge -1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} \qquad (15 \text{ bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (A)

LS 1997-98

Příklad A1 : Gaussovou eliminací obdržíme řešení $x=-3,\ y=13,\ z=2,\ t=-7.$ Spočtěme determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & -2 & 3 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & -2 & 3 & -3\\ 4 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -4 & 1 & -5\\ 0 & -1 & -9 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 9 & 7\\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 58.$$

Příklad A2 : Funkce f je definována na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \sin x + y \geq 0\}$. V bodech, kde $y + \sin x > 0$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků":

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{2}(y+\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2}(y+\sin x)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

V bodech kde $y+\sin x = 0$ nemůže parciální derivace f podle y existovat. Parciální derivace podle x může existovat jen v bodech tvaru $[3\pi/2 + 2k\pi, 1], k \in \mathbb{Z}$. Zkusme počítat podle definice

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(3\pi/2+2k\pi,1) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(3\pi/2+2k\pi+t,1) - f(3\pi/2+2k\pi,1)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(3\pi/2+2k\pi+t)}}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos t}}{t}.\end{aligned}$$

Poslední limita neexistuje protože limita zleva $(-1/\sqrt{2})$ se nerovná limitě zprava $(1/\sqrt{2})$. Parciální derivace funkce f existují pouze na vnitřku množiny M a jsou tam spojité. Proto v bodě $[0,1]$ existuje totální diferenciál, a tedy tečná rovina, která má tvar

$$z = 1 + \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot(y-1).$$

Příklad A3 : Položme

$$F(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \cos(xy)\cdot y - \sin(xy)\cdot y,\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \cos(xy)\cdot x - \sin(xy)\cdot x.\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(\pi,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi,0) = \pi \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[\pi,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{gathered}\sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) = 1,\\ \cos(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x)+x\varphi'(x)) - \sin(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x)+x\varphi'(x)) = 0,\\ -\sin(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x)+x\varphi'(x))^2 + \cos(x\varphi(x))\cdot(2\varphi'(x)+x\varphi''(x))\\ -\cos(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x)+x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x))\cdot(2\varphi'(x)+x\varphi''(x)) = 0.\end{gathered}$$

Dosadíme-li $x = \pi$ a použijeme-li $\varphi(\pi) = 0$, dostaneme $\varphi'(\pi) = 0$ a $\varphi''(\pi) = 0$.

Příklad A4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množin M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro $[0,y];\ y \in (-2,2)$. Hranici množiny M si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^4 + y^4 = 16, x > -1\}, \qquad H_2 = \{[-1,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^4 + y^4 - 16$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y^3, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned}
&(1) & x^4 + y^4 &= 16,\\
&(2) & 4x^3y &= \lambda 4x^3,\\
&(3) & x^4 &= \lambda 4y^3.
\end{aligned}$$

Z (2) vyplývá, že $x = 0$ nebo $y = \lambda$. V prvním případě dostaneme z (1), že $y = \pm 2$. V druhém případě dostaneme z (3), že $x = \sqrt{2}y$ nebo $x = -\sqrt{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \ \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \ \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \ \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku $x > -1$.

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(-1,y) = y, \qquad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \qquad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$ a minima v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$.

Příklad A5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2+1} = x + t$. Pak dostaneme

$$x = \frac{1-t^2}{2t}, \qquad dx = \frac{-2-2t^2}{4t^2}\,dt.$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2 \left(\frac{1-t^2}{2t} + t\right)} \cdot \frac{-2-2t^2}{4t^2}\,dt = \int \frac{-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}\,dt$$

Integrand rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{-4t}{(1-t)^2(1+t)^2}\,dt &= \int \frac{-1}{(1-t)^2}\,dt + \int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt \\ &\overset{c}{=} -\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} = \frac{2}{t^2-1}.\end{aligned}$$

Podle věty o substituci dostáváme

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx \overset{c}{=} \frac{2}{(\sqrt{x^2+1}-x)^2-1}, \qquad x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, +\infty).$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (B)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnost matice A a rozhodněte, zda platí $\det A = 0$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = |x^2 - y^2|. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$2x^4 y + x^3 + y^3 + xy = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y) = 2x + 4y \qquad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2 + 3x + 2}{(x+1)(x^2 + x + 1)}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (B)

LS 1997-98

Příklad B1 : Převeďme matici A pomocí elementárních řádkových úprav na schodovitou matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & -8 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 8 & -103 & -134 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & 54, \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{63} \end{pmatrix}.$$

Matice A má hodnost 5, a je tedy regulární. Proto platí $\det A \neq 0$.

Příklad B2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech, kde $y^2 \neq x^2$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2y.$$

V bodech, kde $y^2 = x^2$, zkusme počítat parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ podle definice

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{|(x+t)^2 - y^2|}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{|2xt + t^2|}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}|2x+t|. \end{aligned}$$

Poslední limita existuje, jen když $x = 0$, a je rovna nule. Vzhledem k symetrii funkce f ($f(x,y) = f(y,x)$) totéž platí pro $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 3 - 2 \cdot (x-1) + 4 \cdot (y-2).$$

Příklad B3 : Položme

$$F(x,y) = 2x^4y + x^3 + y^3 + xy - 1.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 8x^3y + 3x^2 + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^4 + 3y^2 + x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(1,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 3 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 = 0,$$
$$8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,$$
$$24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)$$
$$+\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 0$, dostaneme $\varphi'(1) = -1$ a $\varphi''(1) = 4$.

Příklad B4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množiny M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto f nabývá extrémů na hranici M. Hranici množiny M si rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0,\ y > 0\},$$
$$H_2 = \{[0,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle 0,1\rangle\},$$
$$H_3 = \{[x,0] \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle 0,1\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1$ na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

(1) $$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1,$$

(2) $$2 = \lambda\frac{1}{4}x^{-3/4},$$

(3) $$4 = \lambda\frac{1}{4}y^{-3/4}.$$

Z (2) a (3) vyplývá, že $x = 2\sqrt[3]{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme podezřelý bod

$$\left[\frac{2^{4/3}}{(2^{1/3}+1)^4}, \frac{1}{(2^{1/3}+1)^4}\right].$$

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(0,y) = 4y, \qquad y \in \langle 0,1 \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[0,1]$.

Podobně zkoumejme chování na množině H_3. Funkce f má na H_3 tvar:

$$f(x,0) = 2x, \qquad x \in \langle 0,1 \rangle.$$

Podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[1,0]$.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $[0,1]$ a minima v bodě $[0,0]$.

Příklad B5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Nyní integrujme jednotlivé parciální zlomky:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x+1}\,dx &\overset{c}{=} \log|x+1|,\\
\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}\\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4}\\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dx}{((2x+1)/\sqrt{3})^2+1}\\
&\overset{c}{=} \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Dohromady tedy máme

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx \overset{c}{=} \log|x+1| + \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,+\infty)$.

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (C)

LS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice A.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \sqrt[3]{\log\left(\frac{x}{y}\right)}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y, z) = e^{-z^2}(x^2 + xy + y^2) \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2 + x + 4)}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (C)

LS 1997-98

Příklad C1 : Platí

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 29.$$

Příklad C2 : Funkce f je definována na množině $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x>0,\ y>0\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x<0,\ y<0\}$. V bodech $[x,y] \in \mathcal{D}(f)$, kde $x \neq y$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}\left(\log\frac{x}{y}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{3}\left(\log\frac{x}{y}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{y}$$

V bodech z definičního oboru, kde $y = x$, zkusme počítat parciální derivace podle definice

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,x)-f(x,x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{\log\left(\frac{x+t}{x}\right)}}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0}\sqrt[3]{\frac{\log\left(1+\frac{t}{x}\right)}{\frac{t}{x}}\cdot\frac{\frac{t}{x}}{t^3}} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } x>0, \\ -\infty & \text{pro } x<0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,y) = \lim_{t\to 0}\frac{f(y,y+t)-f(y,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{\log\left(\frac{y}{y+t}\right)}}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} -\sqrt[3]{\frac{\log\left(1+\frac{t}{y}\right)}{\frac{t}{y}}\cdot\frac{\frac{t}{y}}{t^3}} = \begin{cases} -\infty & \text{pro } y>0, \\ +\infty & \text{pro } y<0. \end{cases}$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = -\sqrt[3]{\log 2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(\log 2)^{\frac{2}{3}}}\cdot(x-1) - \frac{1}{6}\frac{1}{(\log 2)^{\frac{2}{3}}}\cdot(y-2).$$

Příklad C3 : Položme

$$F(x,y) = \log(x^2+y^2+\cos(xy)) + y.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G (lze ukázat, že dokonce $G = \mathbb{R}^2$) obsahující bod $[0,0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+\cos(xy)}\cdot(2x - \sin(xy)\cdot y),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+\cos(xy)}\cdot(2y - \sin(xy)\cdot x) + 1.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\log(x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x)))+\varphi(x)=0,$$

$$\frac{1}{x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x))}\cdot(2x+2\varphi(x)\varphi'(x)-\sin(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x)))+\varphi'(x)=0,$$

$$\frac{-1}{(x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x)))^2}\cdot(2x+2\varphi(x)\varphi'(x)-\sin(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x)))^2$$
$$+\frac{1}{x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x))}\cdot(2+2(\varphi'(x))^2+2\varphi(x)\varphi''(x)$$
$$-\cos(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x))^2-\sin(x\varphi(x))(2\varphi'(x)+x\varphi''(x)))+\varphi''(x)=0.$$

Dosadíme-li $x=0$ a použijeme-li $\varphi(0)=0$, dostaneme $\varphi'(0)=0$ a $\varphi''(0)=-2$.

Příklad C4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní (jedná se o plášť válce bez podstav). Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Vnitřek množiny M je prázdný. Z tvaru funkce f vyplývá, že

$$f(x,y,1)=f(x,y,-1)<f(x,y,z)<f(x,y,0),\qquad [x,y,z]\in\mathbb{R}^3,\ z\in(-1,1)\setminus\{0\}.$$

Maxima se musí tedy nabývat na množině $M\cap\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ z=0\}$ a minima na množině $M\cap\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ z=-1 \text{ nebo } z=1\}$. Položme $g(x,y)=x^2+xy+y^2$ a vyšetřujme extrémy g na množině $H=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1\}$ metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $h(x,y)=x^2+y^2-1$. Platí $g,h\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce h platí

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=2x,\qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=2y.$$

Pro každé $[x,y]\in H$ máme $(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y),\frac{\partial h}{\partial y}(x,y))\neq(0,0)$. Řešme následující soustavu

(1) $$x^2+y^2=1,$$

(2) $$2x+y=\lambda 2x,$$

(3) $$x+2y=\lambda 2y.$$

Sečtením (2) a (3) dostaneme

$$(3-2\lambda)(x+y)=0.$$

To znamená, že buď $x=-y$ nebo $\lambda=3/2$. V prvním případě dostaneme z (1) podezřelé body $[1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$. Ve druhém případě s pomocí (2) odvodíme $x=y$ a (1) dává podezřelé body $[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$. Funkce g nabývá minima na množině H v bodech $[1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$ a maxima v bodech $[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$.

Z výše uvedeného výpočtu vyplývá, že funkce f nabývá minima v bodech

$$[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},-1],\ [1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},-1],\ [-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},1],\ [1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},1]$$

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0],\ [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0].$$

Příklad C5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^3+4x^2-19x+16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{Cx+D}{x^2+x+4}.$$

Vyřešením odpovídající soustavy lineárních rovnic dostaneme rozklad

$$\frac{2x^3+4x^2-19x+16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2x+31}{x^2+x+4}.$$

Integrace prvních dvou parciálních zlomků je snadná. Integrujme

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+31}{x^2+x+4}\,dx &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+4}\,dx + 30\int \frac{1}{(x+1/2)^2+15/4}\,dx \\ &= \log(x^2+x+4) + 8\int \frac{1}{\left((2x+1)/\sqrt{15}\right)^2+1}\,dx \\ &\overset{c}{=} \log(x^2+x+4) + 4\sqrt{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)\end{aligned}$$

Dohromady máme

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+4x^2-19x+16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}\,dx \overset{c}{=} -\frac{1}{x-2} + \frac{8}{5}\log|x-2| \\ + \frac{1}{5}\log(x^2+x+4) + \frac{4\sqrt{15}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)\end{aligned}$$

pro $x \in (-\infty, 2)$ nebo $x \in (2, +\infty)$.

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (D)

LS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice A.

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y) = e^{x^2-y} + 7y + |xy|. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M. Nakreslete množinu M.

$$f(x,y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3 \qquad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 4, x \le 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Spočtěte

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}\,dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (D)

LS 1997-98

Příklad D1 : Platí

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 32.$$

Příklad D2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech $[x,y]$, kde $xy \neq 0$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2-y} \cdot 2x + \operatorname{sgn}(xy) \cdot y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{x^2-y} + 7 + \operatorname{sgn}(xy) \cdot x.$$

Zbývá vyšetřit parciální derivace v bodech, kde $xy = 0$. Z věty o aritmetice limit plyne, že funkce f má parciální derivaci podle x (resp. podle y) v bodě $[x,y]$ právě tehdy, když ji tam má funkce $g : [x,y] \to |xy|$ (je totiž $f - g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$). Počítejme derivace funkce g v bodech $[x,0]$, $x \in \mathbb{R}$, a $[0,y]$, $y \in \mathbb{R}$, podle definice:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x+t,0) - g(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x,t) - g(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|xt|}{t} = \lim_{t\to 0} |x| \operatorname{sgn} t.$$

Poslední limita existuje, právě když $x = 0$, a v tomto případě je nulová.

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{g(0,y+t) - g(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,y) - g(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|ty|}{t} = \lim_{t\to 0} |y| \operatorname{sgn} t.$$

Poslední limita existuje, právě když $y = 0$, a v tomto případě je nulová.

Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,y];\ y \in \mathbb{R},\ y \neq 0\},$$
$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,0];\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}.$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 1/e + 16 + (2/e + 2) \cdot (x-1) + (8 - 1/e) \cdot (y-2).$$

Příklad D3 : Položme

$$F(x,y) = \log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G obsahující bod $[0,0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} \cdot \frac{1}{1+y^2} + x.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\log(x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1) + x\varphi(x) = 0,$$

$$\frac{1}{x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1} \cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,$$

$$\frac{-1}{(x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1)^2} \cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1} \cdot \frac{\varphi''(x)(1 + \varphi(x)^2) - 2\varphi'(x)\varphi'(x)\varphi(x)}{(1 + \varphi(x)^2)^2}$$
$$+ \varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0,$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = -1$ a $\varphi''(0) = 2$.

Příklad D4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu s uzavřenou polorovinou), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body nejprve uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

Obě parciální derivace jsou nulové v bodech $[-1/2, 0]$, $[0,0]$. Pouze první bod však patří do vnitřku množiny M.

Hranici množiny M si rozdělíme na dvě části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x = 0,\ y \in [-2,2]\},$$
$$H_2 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 4,\ x < 0\}.$$

Na množině H_1 má funkce f podezřelé body: $[0,2]$, $[0,-2]$, $[0,0]$, protože $f(0,y) = -y^2$. Podezřelé body na H_2 budeme hledat metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$. Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Na množině H_2 je vždy $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{1}$$
$$2x + 4x^2 = \lambda 2x, \tag{2}$$
$$-2y = \lambda 2y. \tag{3}$$

Z (3) dostaneme, že $\lambda = -1$ nebo $y = 0$. První možnost spolu s (2) dává, že $x = 0$ nebo $x = -1$. Pomocí (1) dopočteme pro tato x příslušná y a dostaneme body

$$[0,2],\ [0,-2],\ [-1,\sqrt{3}],\ [-1,-\sqrt{3}].$$

První dva ovšem neleží v H_2. Pokud $y = 0$, pak z (1) dostáváme bod $[-2, 0]$ a bod $[2, 0]$, který ovšem neleží v H_2.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima v bodě $[-1/2, 0]$ a minima v bodě $[-2, 0]$.

Příklad D5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\langle 1, +\infty)$. Použijeme substituci $\sqrt{x-1} = t$. Dostaneme $x = t^2 + 1$ a $dx = 2t\,dt$. Nyní je třeba integrovat:

$$\int \frac{2t^2}{t^2+3}\,dt = \int \left(2 - \frac{6}{t^2+3}\right)\,dt = \int 2\,dt - \int \frac{2}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,dt$$
$$\stackrel{c}{=} 2t - 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}.$$

Podle věty o substituci máme:

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}\,dx = 2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3}}, \qquad x \in (1, +\infty).$$

Určitý integrál spočteme pomocí právě vypočtené primitivní funkce a dostaneme

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}\,dx = 2\sqrt{3}(1 - \pi/4).$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (E)

LS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice A.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y) = \min\{x^2+y^2, 2-x^2-y^2\}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$x^y + y^x = 2y$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y,z) = xy + yz \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y+z = 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Spočtěte

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (E)

LS 1997-98

Příklad E1 : Platí:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -16 & -8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -16.$$

Příklad E2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro funkci f platí:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{pro } x^2 + y^2 \leq 1; \\ 2 - x^2 - y^2 & \text{pro } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

V bodech $[x, y]$, kde $x^2 + y^2 \neq 1$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x^2 + y^2 < 1; \\ -2x & \text{pro } x^2 + y^2 > 1; \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{pro } x^2 + y^2 < 1; \\ -2y & \text{pro } x^2 + y^2 > 1; \end{cases}.$$

Zbývá vyšetřit parciální derivace v bodech, kde $x^2+y^2 = 1$. Uvažujme bod $[x_0, y_0]$ takový, že $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Počítejme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{(x_0+t)^2 + y_0^2, 2 - (x_0+t)^2 - y_0^2\} - 1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{1 + 2x_0 t + t^2, 1 - 2x_0 t - t^2\} - 1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{2x_0 t + t^2, -2x_0 t - t^2\}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} -|2x_0 t + t^2|/t = \begin{cases} 0 & \text{pro } x_0 = 0 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } x_0 \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vzhledem k symetrii funkce f lze parciální derivaci podle y počítat analogicky.

Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y];\ x^2 + y^2 = 1,\ x \neq 0\},$$
$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y];\ x^2 + y^2 = 1,\ y \neq 0\}.$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = -3 - 2 \cdot (x-1) - 4 \cdot (y-2).$$

Příklad E3 : Položme

$$F(x,y) = x^y + y^x - 2y.$$

Funkce F je definována na otevřené množině $G = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, která obsahuje bod $[1, 1]$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} + y^x \log y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^y \log x + xy^{x-1} - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1,1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepišme na tvar

$$e^{\varphi(x)\log x} + e^{x\log\varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi''(x)\log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right) \\ + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2 \\ + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) = 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

Příklad E4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce g_1, g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ stejně jako funkce f. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 1, \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + z, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 1, \\ &\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = 1. \end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1,1,1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

(1) $$y = \lambda_1 2x + \lambda_2,$$

(2) $$x + z = \lambda_1 2y + \lambda_2,$$

(3) $$y = \lambda_1 2z + \lambda_2,$$

(4) $$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

(5) $$x + y + z = 1.$$

Z (1) a (3) vyplývá $\lambda_1 x = \lambda_1 z$. To znamená, že máme dvě možnosti: buď $\lambda_1 = 0$ nebo $x = z$.

V prvním případě dostaneme nejprve z (1) $y = \lambda_2$. Odtud a z (2) obdržíme $x + z = y$. Tento vztah spolu s (4) a (5) dává podezřelé body

$$\left[(1-\sqrt{5})/4, 1/2, (1+\sqrt{5})/4\right], \qquad \left[(1+\sqrt{5})/4, 1/2, (1-\sqrt{5})/4\right].$$

Ve druhém případě dostaneme pomocí vztahů (4) a (5) podezřelé body

$$[0,1,0], \qquad [2/3, -1/3, 2/3].$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá na množině M minima v bodě $[2/3, -1/3, 2/3]$ a maxima nabývá v prvních dvou podezřelých bodech.

Příklad E5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. My budeme hledat primitivní funkci na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Použijeme substituci $\cos x = t$. Dostaneme $-\sin x \, dx = dt$. Nyní je třeba spočítat:

$$\int \frac{-1}{t + t^3} \, dt.$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{-1}{t+t^3} \, dt &= \int \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} \, dt - \int \frac{1}{t} \, dt \\ &\stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log(1+t^2) - \log|t|, \qquad t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } t \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Podle věty o substituci máme:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x} \, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log(1 + \cos^2 x) - \log|\cos x|, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Určitý integrál spočteme pomocí právě vypočtené primitivní funkce a dostaneme

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x} \, dx = \frac{1}{2} \log \frac{5}{2}.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (F)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnost matice A v závislosti na parametru:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = x^{(y^x)}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$y^3x^2 + y^2x^2 + \sin y = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \qquad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + 4y^2 \le 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Spočtěte

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (F)

LS 1997-98

Příklad F1 : Upravme matici A pomocí řádkových elementárních úprav, které nemění hodnost matice:

$$h(A) = h\begin{pmatrix} x & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ x & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= h\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2x & 2+3x \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2x & 2+3x \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pokud $x \neq 0$, je hodnost matice rovna 3. V případě, že $x = 0$, je hodnost matice A rovna 2.

Příklad F2 : Funkce f je definována na $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Pro funkci f platí:

$$f(x, y) = \exp(y^x \log x).$$

V bodech $[x, y] \in \mathcal{D}(f)$ můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \exp(y^x \log x) \cdot \left(y^x \cdot \log y \cdot \log x + y^x \cdot \frac{1}{x} \right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \exp(y^x \log x) \cdot \left(x y^{x-1} \cdot \log x \right).$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 1 + 2 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 2).$$

Příklad F3 : Položme

$$F(x, y) = y^3 x^2 + y^2 x^2 + \sin y.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2y^3 x + 2y^2 x,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 x^2 + 2y x^2 + \cos y.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\varphi(x)^3 x^2 + \varphi(x)^2 x^2 + \sin \varphi(x) = 0.$$

Postupně obdržíme

$$3\varphi(x)^2 \varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)^3 x + 2\varphi(x)\varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)^2 x + \cos \varphi(x) \cdot \varphi'(x) = 0,$$
$$6\varphi(x)\varphi'(x)\varphi'(x) x^2 + 3\varphi(x)^2 \varphi''(x) x^2 + 6\varphi(x)^2 \varphi'(x) x + 6\varphi(x)^2 \varphi'(x) x$$
$$+2\varphi(x)^3 + 2\varphi'(x)\varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) x^2 + 4\varphi(x)\varphi'(x) x$$
$$+4\varphi(x)\varphi'(x) x + 2\varphi(x)^2 - \sin \varphi(x) \cdot \varphi'(x)\varphi'(x) + \cos \varphi(x) \cdot \varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 0$.

Příklad F4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o elipsu), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme nejprve podezřelé body uvnitř množiny M. Pro parciální derivace funkce f platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y).$$

Uvnitř množiny M hledáme ty body, kde jsou obě parciální derivace nulové. To jsou právě ty body z M, které splňují

$$2x(1-2(x^2+7y^2)) = 0,$$
$$2y(7-(x^2+7y^2)) = 0.$$

Řešením této soustavy jsou body $[0,0]$, $[1/\sqrt{2},0]$, $[-1/\sqrt{2},0]$, $[0,1]$, $[0,-1]$, pouze první tři však leží uvnitř množiny M.

Podezřelé body na hranici M hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina $H(M)$ je určena pomocí vazebné funkce

$$g(x,y) = x^2+4y^2-1.$$

Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 8y.$$

Vektor $(2x,8y)$ je nulový, právě když $[x,y]=[0,0]$. Tento bod ovšem neleží na hranici množiny M. Nyní budeme řešit následující soustavu

(1) $$2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x) = 2\lambda x,$$

(2) $$14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y) = 8\lambda y,$$

(3) $$x^2+4y^2 = 1.$$

Z (1) vyplývá, že $x=0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = \lambda$ a z (2) vyplývá, že $y=0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)) = 4\lambda$. Pokud $x=0$, pak podle (3) je $y=\pm 1/2$. Pokud $y=0$, pak podle (3) je $x=\pm 1$. V případě, že $x \neq 0$ a $y \neq 0$, musí být

$$4e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)).$$

Odtud plyne $7(x^2+7y^2) = -3$, což je spor.

Nalezli jsme tyto podezřelé body

$$[0,0],\ [1/\sqrt{2},0],\ [-1/\sqrt{2},0],\ [0,1/2],\ [0,-1/2],\ [1,0],\ [-1,0].$$

Funkce f nabývá maxima v bodech $[0,1/2]$, $[0,-1/2]$ a minima v bodě $[0,0]$.

Příklad F5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus (\{\pi/2 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\})$. My budeme hledat primitivní funkci na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Použijeme substituci $\cos x = t$. Dostaneme $-\sin x\, dx = dt$. Nyní je třeba spočítat:

$$\int \frac{-1}{t+t^2}\, dt.$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\int \frac{-1}{t+t^2}\, dt = \int \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{t} \right) dt = \int \frac{1}{1+t}\, dt - \int \frac{1}{t}\, dt$$
$$\stackrel{c}{=} \log|1+t| - \log|t|, \qquad t \in (-\infty, -1) \text{ nebo } t \in (-1, 0) \text{ nebo } t \in (0, +\infty).$$

Podle věty o substituci máme:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\, dx \stackrel{c}{=} \log|1+\cos x| - \log|\cos x|, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Určitý integrál spočteme pomocí právě vypočtené primitivní funkce a dostaneme

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\, dx = \log \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad 1 : Nalezněte matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = (\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}))^4. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y, z) = z + e^{xy} \qquad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2 + 5x + 5}{(x + 1)(x^2 + 2x + 4)}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad G1 : Standardním postupem obdržíme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 17 & 4 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 11 & 26 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Platí tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 12 & 3 & 4 \\ -7 & -17 & -4 & -6 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad G2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech $[x,y] \neq [0,0]$ můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}))^3 \cdot \frac{x}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}))^3 \cdot \frac{y}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

V bodě $[0,0]$ spočítáme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\operatorname{arctg}(\sqrt{t^2}))^4}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg}(|t|)}{|t|}\right)^4 \cdot \frac{|t|^4}{t} = 0.$$

Vzhledem k symetrii funkce f platí také $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = (\operatorname{arctg}\sqrt{5})^4 + \frac{2}{3}(\operatorname{arctg}\sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x-1) + \frac{4}{3}(\operatorname{arctg}\sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (y-2).$$

Příklad G3 : Položme

$$F(x,y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot x - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -2 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin x\varphi(x)} - 2\varphi(x) - 2 = 0.$$

Postupně obdržíme

$$e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - 2\varphi'(x) = 0,$$
$$e^{\sin x^2} \cdot (\cos x^2 \cdot 2x)^2 - e^{\sin x^2} \cdot \sin x^2 \cdot 4x^2$$
$$+e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2 + e^{\sin x\varphi(x)} (\cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2$$
$$-e^{\sin x\varphi(x)} \sin x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x))$$
$$-2\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 1$.

Příklad G4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Množina M má prázdný vnitřek.

Podezřelé body hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Funkce f, g_1 i g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{xy}y, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^{xy}x, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 2y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = -2z.$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(2x, 2y, -2z)$ jsou lineárně závislé, právě když $z = 0$ nebo $x = y = 0$. Žádný takový bod neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x, \tag{1}$$
$$e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y, \tag{2}$$
$$1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z, \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{4}$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \tag{5}$$

Z (4) a (5) vyplývá, že $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Odečteme-li (1) od (2) dostaneme

$$e^{xy}(x-y) = -2(\lambda_1+\lambda_2)(x-y).$$

Z poslední rovnice plyne, že buď $x = y$ nebo $e^{xy} = -2(\lambda_1+\lambda_2)$. V prvním případě dopočítáme ze (4) tyto podezřelé body

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Ve druhém případě dosadíme za e^{xy} do (1) a dostaneme

$$-2y(\lambda_1+\lambda_2) = 2x(\lambda_1+\lambda_2).$$

Nyní máme opět dvě možnosti: buď $x = -y$ nebo $\lambda_1+\lambda_2 = 0$. První možnost dává podezřelé body

$$[1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Druhá možnost spolu s (1) a (2) dává $x = y = 0$. Toto však nemůže nastat vzhledem ke (4) a (5).

Funkce f nabývá maxima v bodech

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \qquad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}]$$

a minima

$$[-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \qquad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Příklad G5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Provedeme rozklad integrandu na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x^2+5x+5}{(x+1)(x^2+2x+4)}\,dx = \int \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{x+1} + \frac{4x+7}{x^2+2x+4}\right)dx \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{3}{x^2+2x+4}\,dx \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{((x+1)/\sqrt{3})^2+1}\,dx \\
&\overset{c}{=} \frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{2}{3}\log(x^2+2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right), \\
&x \in (-\infty, -1) \text{ nebo } x \in (-1, +\infty).
\end{aligned}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnost matice A v závislosti na parametru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, určete kde existují vlastní parciální derivace a spočtěte je; napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x\cos y) & x \geq 0 \\ \cos(x\sin y) + 2 & x < 0 \end{cases}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$$

určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$$
$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = y^2 + z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad H1 : Pomocí řádkových elementárních úprav, které nemění hodnost matice, dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & x & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & x-2 & x-1 \end{pmatrix}.$$

Pokud $x = 2$, pak $h(A) = 3$. V případě, že $x \neq 2$, pak lze číslem $x - 2$ dělit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{x-1}{x-2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & \frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Poslední řádek je nulový, právě když $\frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} = 0$, tj. právě když $x = 7$.

Závěr: $h(A) = 2$ pro $x = 7$, $h(A) = 3$ pro $x \neq 7$.

Příklad H2 : Okamžitě vidíme, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Pokud $x \neq 0$ lze v bodě $[x, y]$ počítat parciální derivace „podle vzorečků“.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \cos(x \cos y) \cdot \cos y & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x \sin y) \cdot \sin y & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \cos(x \cos y) \cdot (-x \sin y) & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x \sin y) \cdot (x \cos y) & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

V bodech tvaru $[0, y]$ budeme počítat parciální derivace „z definice“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, y) - f(t, 0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, y)}{t}$$

Tato limita ovšem neexistuje, protože limita zleva $(-\infty)$ se nerovná limitě zprava $(\cos y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = \lim_{t \to y} \frac{f(0, t) - f(0, y)}{t - y} = \lim_{t \to y} \frac{0}{t - y} = 0.$$

V bodě $[1, 2]$ jsou obě parciální derivace spojité, a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \cos(\cos 2) \cdot \cos 2 \cdot (x - 1) - \cos(\cos 2) \cdot \sin 2 \cdot (y - 2) + \sin(\cos 2).$$

Příklad H3 : Položme

$$F(x, y) = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2).$$

Bod $[0, 0]$ je ve vnitřku definičního oboru funkce F - můžeme tedy spočítat parciální derivace funkce F na jistém okolí G bodu $[0, 0]$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}.$$

Obě parciální derivace jsou na jistém okolí bodu $[0, 0]$ spojité a navíc tam jsou jejich parciální derivace spojité, tj. $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\arcsin(x+(\varphi(x))^2)+\pi/2-\arccos(\varphi(x)+x^2)=0,$$
$$\frac{1+2\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1-(x+(\varphi(x))^2)^2}}+\frac{\varphi'(x)+2x}{\sqrt{1-(\varphi(x)+x^2)^2}}=0,$$
$$-\frac{1}{2}(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2(x+(\varphi(x))^2))\cdot(1+2\varphi(x)\varphi'(x))^2$$
$$+(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2(\varphi'(x))^2+2\varphi(x)\varphi''(x))$$
$$-\frac{1}{2}(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2(\varphi(x)+x^2))\cdot(\varphi'(x)+2x)^2$$
$$+(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(\varphi''(x)+2)=0.$$

Dosadíme-li $x=0$ a využijeme-li $\varphi(0)=0$, dostaneme $\varphi'(0)=-1$ a $\varphi''(0)=-4$.

Příklad H4 : Položme

$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1, \qquad g_2(x,y,z)=x-y^2-z^2.$$

Obě funkce jsou spojité a proto je množina M uzavřená. Množina M je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^n$ vyplývá, že M je kompaktní. Funkce f je spojitá a proto nabývá na M svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že $f,\ g_1,\ g_2\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+2z & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)=2x & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)=1\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)=2y & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)=-2y\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y)=2x+1 & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y)=2z & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y)=-2z
\end{array}$$

Zkoumejme pro která $[x,y,z]\in M$ jsou vektory $(2x,2y,2z),\ (1,-2y,-2z)$ lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnost následující matice menší než 2.

$$\begin{pmatrix}1 & -2y & -2z\\ 2x & 2y & 2z\end{pmatrix}$$

Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix}1 & -2y & -2z\\ 2x+1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je menší než 2, právě když $x=-\frac{1}{2}$ nebo $y=z=0$. Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v M.

Nyní řešme soustavu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{1}$$

$$x = y^2 + z^2 \tag{2}$$

$$2x + 2z = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \tag{3}$$

$$2y = 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y \tag{4}$$

$$2x + 1 = 2\lambda_1 z - 2\lambda_2 z \tag{5}$$

Z (1) a (2) vyplývá $x^2 + x - 1 = 0$, tj. $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Vzhledem k (2) musí být x nezáporné a proto nás zajímá pouze kladný kořen kvadratické rovnice, tj.

$$x = (\sqrt{5} - 1)/2. \tag{6}$$

Z (4) vyplývá, že buď $y = 0$ nebo $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$. V prvním případě vypočteme z (2) a (6), že $z = \pm\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$. Odtud dostáváme podezřelé body

$$\left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}\right], \qquad \left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, -\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}\right].$$

Ve druhém případě plyne z (5) $x + \frac{1}{2} = z$. Takže $z = \sqrt{5}/2$. Z (2) plyne $y^2 = x - z^2$. Po dosazení máme $y^2 = (2\sqrt{5} - 7)/4 < 0$ – což není možné.

Dosazením zjistíme, že funkce f nabývá na M svého maxima v prvním podezřelém bodě a minima ve druhém.

Příklad H5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$. Pak dostaneme

$$x = \frac{1 - t^2}{2t - 1}, \qquad dx = \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(2t - 1)^2}\, dt.$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{\frac{1-t^2}{2t-1} + 1}{\frac{1-t^2}{2t-1} + t} \cdot \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(2t - 1)^2}\, dt = \int \frac{-2(2t - t^2)}{(2t - 1)^2}\, dt$$

Platí

$$\frac{-2(2t - t^2)}{(2t - 1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{4t + 1}{(2t - 1)^2}$$

Rozložíme-li druhý výraz na parciální zlomky dostaneme

$$\int \frac{-2(2t - t^2)}{(2t - 1)^2}\, dt = \int \frac{1}{2}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{3}{(2t - 1)^2}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{2}{2t - 1}\, dt$$
$$\stackrel{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{3}{8t - 4} - \frac{1}{2}\log|2t - 1|, \quad t \in (-\infty, 1/2) \text{ nebo } t \in (1/2, +\infty).$$

Podle věty o substituci dostáváme

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$$
$$+ \frac{3}{8(\sqrt{x^2 + x + 1} - x) - 4} - \frac{1}{2}\log|2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (I)

LS 1997-98

Příklad 1 : Řešte soustavu $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y - 1}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\operatorname{arctg}(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (I)

LS 1997-98

Příklad I1 : Napišme si rozšířenou matici $(A|b)$ a proveďme Gaussovu eliminaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Odtud již snadno spočteme: $x_1 = -2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = -3.$

Příklad I2 : Pro definiční obor platí: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x+y=1\}$. Pro parciální derivace platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{xy - x - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x+y-1)^2}, \qquad [x,y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0,0]\}; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{xy - x^2 - y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+y-1)^2}, \qquad [x,y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0,0]\}. \end{aligned}$$

V bodě $[0,0]$ počítejme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t-0} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\sqrt{t^2}}{t-1}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{(t-1)t} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sgn} t}{t-1}.$$

Poslední limita neexistuje, protože limita zleva je rovna 1 a zprava je rovna -1. To znamená, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neexistuje. Naprosto stejným postupem lze ukázat, že ani $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje.

V bodě $[1,2]$ jsou obě parciální derivace spojité a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \frac{-3}{4\sqrt{5}} \cdot (x-1) - \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot (y-2) + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Příklad I3 : Položme

$$F(x,y) = \operatorname{arctg}(y^2 + xy) - e^{xy} + \cos x - y.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \frac{y}{1+(y^2+xy)^2} - e^{xy}y - \sin x, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y+x}{1+(y^2+xy)^2} - e^{xy}x - 1. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy

$\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\operatorname{arctg}((\varphi(x))^2 + x\varphi(x)) - e^{x\varphi(x)} + \cos x - \varphi(x) = 0.$$

$$\frac{2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x)}{1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))e^{x\varphi(x)} - \sin x - \varphi'(x) = 0,$$

$$\frac{-2((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))}{(1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2)^2} \cdot (2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x))^2$$
$$+ \frac{2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) + \varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x)}{1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2}$$
$$-(\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x))e^{x\varphi(x)} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 e^{x\varphi(x)}$$
$$- \cos x - \varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = -1$.

Příklad I4 : Množina M je uzavřená a omezená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu a uzavřeného prvního kvadrantu) – je tedy kompaktní. Funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a proto musí nabývat maxima i minima na množině M. Zkoumejme chování funkce f nejprve na vnitřku množiny M.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Uvnitř množiny M jsou obě parciální derivace funkce f nenulové, proto uvnitř M není žádný podezřelý bod. Hranici množiny M rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x, 0];\ x \in \langle 0, 1\rangle\},$$
$$H_2 = \{[0, y];\ y \in \langle 0, 1\rangle\},$$
$$H_3 = \{[x, y];\ x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Je-li $[x, y] \in H_1$, platí $f(x, y) = \operatorname{arctg} x$. Funkce arctg je rostoucí a proto podezřelými body jsou $[0, 0]$ a $[1, 0]$. Podobně je tomu na množině H_2. Tam dostáváme podezřelé body $[0, 0]$ a $[0, 1]$. Na H_3 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Nechť $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Vidíme, že $f,\ g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Vektor $(2x, 2y)$ je nulový, právě když $[x, y] = [0, 0]$ – tento bod ovšem neleží v H_3. Nyní je třeba vyřešit následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{1 + x^2} = \lambda 2x \tag{2}$$

$$\frac{1}{1 + y^2} = \lambda 2y \tag{3}$$

Z (2) a (3) vyplývá

$$\lambda 2x(1+x^2) = \lambda 2y(1+y^2). \tag{4}$$

Z (2) vyplývá, že $\lambda \neq 0$. Proto můžeme (4) upravit na tvar

$$x - y = -(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

Platí tedy buď $x = y$ nebo $-1 = x^2+xy+y^2$. Druhá možnost však nastat nemůže, neboť prvky z H_3 mají obě souřadnice kladné. První možnost spolu s (1) dává další podezřelý bod $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Nalezli jsme tyto podezřelé body:

$$[0,0], \qquad [0,1], \qquad [1,0], \qquad [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}].$$

Porovnáním funkčních hodnot funkce f v uvedených bodech (proveďte podrobně) zjistíme, že f nabývá svého minima v bodě $[0,0]$ a maxima v bodě $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Příklad I5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2+2x+4} = x + t$. Pak dostaneme

$$x = \frac{t^2-4}{2(1-t)}, \qquad dx = \frac{-t^2+2t-4}{2(1-t)^2}\,dt.$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{\frac{t^2-4}{2(1-t)}}{\frac{t^2-4}{2(1-t)}+t} \cdot \frac{-t^2+2t-4}{2(1-t)^2}\,dt = \int \frac{t^2-4}{2t^2-4t+2}\,dt$$

Platí

$$\frac{t^2-4}{2t^2-4t+2} = \frac{1}{2} + \frac{2t-5}{2t^2-4t+2}$$

Rozložíme-li poslední výraz na parciální zlomky dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2-4}{2t^2-4t+2}\,dt &= \int \frac{1}{2}\,dt + \int \frac{1}{t-1}\,dt - \int \frac{3}{2(t-1)^2}\,dt \\ &\overset{c}{=} \frac{1}{2}t + \log|t-1| + \frac{3}{2(t-1)}, \qquad t \in (-\infty, 1) \text{ nebo } t \in (1, +\infty).\end{aligned}$$

Podle věty o substituci dostáváme

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}\,dx &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+2x+4} - x\right) \\ &\quad + \log\left|\sqrt{x^2+2x+4} - x - 1\right| + \frac{3}{2\left(\sqrt{x^2+2x+4} - x - 1\right)}, \qquad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$