

Bonusové cvičení 8. 12.

Limity posloupností a funkcí

Příklad. (Posloupnosti)

Na cvičení jsme dělali zkuškový příklad: 1) obsahující celou částí, n -tou odmocninu, součet závisející na n a 2) obsahující rozdíly 2/ 2 a 3 odmocnin s polynomy a mocninnými funkcemi.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{4n} + (4n)^n} \left(\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)^{18} - \left(4 + \frac{4}{n^2}\right)^9 \right) = 9 \cdot 2^{16}.$

Poznámka. N -tá odmocnina – dva policažti. Podílové kritérium. Binomická věta.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(10^{n^2} + 10^n + n^2) \sin \frac{2n}{n^3+n} = 2 \log 10.$

Poznámka. Heine, známá limita. Trik s logaritmem v nekonečnu.

Příklad. (Funkce)

Na cvičení jsme dělali zkuškový příklad: 1) obsahující parametr, rozdíly tangens a cotangens, exponenciální trik a 2) obsahující Heineho větu, trik u arkustangens.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \right)^{\cot^2(\pi x)} = e^{\frac{1}{2\pi^2}}.$

Poznámka. Exponenciální trik, spojitost. U goniometrických funkcí se hodí posunutí argumentu. Složené funkce – všechny jednoduché.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^3 \cos x - x}}{x \cdot \cos(\arctan(\frac{1}{x^2}))} = -\frac{1}{6}.$

Poznámka. Rozdíly odmocnin, známá limita. Dvě možnosti, co se zbytkem – derivace/”trik”.

Příklad. (Je dobré si rozmyslet)

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1^1 + 2^2 + \dots + n^n)}{\sqrt{n^4 + 2n^3 \log n} - \sqrt{n^4 - n^3}} = 1.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\lfloor \sqrt[n]{n^{\log n} + \pi^n + \log \sqrt{n} n} \rfloor}$ neexistuje.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^{2^x} - 16}{\sqrt{1 - \cos(2\pi x)}}$ neexistuje. Vyjde $\pm \frac{32}{\pi} \sqrt{2} \log^2 2.$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x + \frac{1}{\cos x} - 1 \right)^{\frac{1}{\sin(x^4)}} = \sqrt[4]{e}.$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(x+1)}{\log(x-1)} \right)^{x \log x} = e^2.$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^{\frac{\pi}{x \cdot \operatorname{arccotg}^2 x}} = \frac{1}{e^2}.$

Případně nějaká indukce, vzorce pro součty geometrické/aritmetické řady, $\sin(\arctan x)$...