Bonusové cvičení 5. 1.

Průběhy funkcí

Příklad. Vyšetřete průběh zadané funkce f.

(1) $f(x) = xe^{\frac{1}{x^2-2}}$.

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 7x}$.

(3) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x-3}}$.

(4) $f(x) = \arctan\left(\frac{8x}{x^2-25}\right)$.

(5) $f(x) = |x-2| - 3\arctan(x+2)$.

(6) $f(x) = (3^{x+2|x|} - 9)^2$.

(7) $f(x) = \frac{4^x-12}{(2^x-9)^2}$.

Poznámka.

(1) Viz zde: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/pis-fsv/1920/mi-b.pdf`.
Tento příklad je výpočetně náročnější, je třeba řešit dvě bikvadratické rovnice. Na druhou stranu je funkce symetrická, což může výpočet trochu uspíšit.

(2) Viz zde: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/pis-fsv/1011/mi-d.pdf`.
Derivace v jednom bodě vyjde nekonečná, takže je dobré si rozmyslet, co to říká o grafu. Jelikož je zde derivace nevlastní, tak v tomto bodě nemá smysl zkoumat druhou derivaci. Ze standardního výpočtu vidíme, že v tomto bodě dochází ke změně konvexita na konkavitu, ale dle definice nejde o inflexní bod (je potřeba konečná první derivace).

(3) Viz zde: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~vlasakv/1819z/zkousky/pisemkaDreseni.pdf`.
Principiálně jde o velice podobný příklad jako druhý příklad, který jsme dělali na cvičení. Akorát v jednom bodě neexistuje první derivace, nemá zde tedy smysl zkoumat derivaci druhou, což vede na nutnost roztrhnout interval konvexity (podobně jako v prvním příkladu na cvičení). Na rozdíl od předchozího příkladu se zde nemění konvexita na konkavitu.

(4) Viz zde: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/pis-fsv/1011/mi-e.pdf`.
Díky lichosti se dá výpočet zjednodušit, velice přímočaré bez nějakých chytáků.

(5) Viz zde: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~vlasakv/2122z/zkousky/pisemkaEreseni.pdf`.
Tady jsou problematické průsečíky. Není prakticky možné určit přesnou hodnotu, ale dá se alespoň nahlédnout jaké mají znaménko (což je pro charakter grafu podstatné). První derivace v jednom bodě neexistuje, nemá tedy smysl zde počítat derivaci druhou. Standardně můžeme spočítat, že v tomto bodě nedochází ke změně konvexity na konkavitu. Je ale ovšem nutné roztrhnout interval konvexity, viz př. (3).

(6) Viz zde: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/pis-fsv/0809/mi-e.pdf`.
Přímočarý. Jako v př. (3) a (5) je nutné roztrhnout interval konvexity kolem bodu ve kterém nemá smysl zkoumat druhou derivaci.

(7) Viz zde: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~vlasakv/1819z/zkousky/pisemkaCreseni.pdf`.
Je to přímočaré, ale výpočetně náročnější. Je potřeba si uvědomit, jak jsou navzájem uspořádané průsečíky, inflexní body a body extrémů.

Poznámka. *Počítám, že udělám:*

- *př. (7) – pracný příklad.*
- *př. (2) – konvexita kolem problémového bodu.*
- *př. (5) – v případě zájmu.*

Řešení.

(1) Zjevně je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{2}\}$ a funkce je zde spojitá. Jediným průsečíkem je počátek. Funkce tedy není periodická a můžeme si povšimnout, že je lichá a není sudá. Funkci budeme tedy zkoumat na polopřímce $[0,+\infty)$.

Limity. Z aritmetiky limit ihned dostáváme, že limita v $+\infty$ je $+\infty$. Obdobně je limita v $\sqrt{2}$ zprava, resp. zleva rovna $+\infty$, resp. 0. Asymptota v $+\infty$ vyjde jako přímka $y = x$. Díky lichosti tedy máme limitu v $-\infty$ rovnu $-\infty$, limitu v $-\sqrt{2}$ zprava rovnu 0 a zleva rovnu $-\infty$. Asymptota v $-\infty$ je opět $y = x$.

První derivace. Snadno spočítáme, že $f'(x) = e^{\frac{1}{x^2-2}}\left[1 - \frac{2x^2}{(x^2-2)^2}\right]$, což dává smysl v celém definičním oboru. Derivace je nulová právě v bodech, které odpovídají řešení bikvadratické rovnice $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$. Ta má kořeny

$$x_1 = -\sqrt{3+\sqrt{5}}, \quad x_2 = -\sqrt{3-\sqrt{5}}, \quad x_3 = \sqrt{3-\sqrt{5}}, \quad x_4 = \sqrt{3+\sqrt{5}}.$$

Nahlédneme, že f roste na intervalech $[0, x_3], [x_4, +\infty)$ a klesá na $[x_3, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, x_4]$. Z lichosti roste na $(-\infty, x_1], [x_2, 0]$ a klesá na $[x_1, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, x_2]$. Z toho máme, že v bodech x_1, x_3 jsou lokální maxima, zatímco v bodech x_2, x_4 jsou lokální minima. Z tohoto můžeme určit obor hodnot. Je potřeba si uvědomit, že $f(x_3) < f(x_4)$, pravá část grafu nám tedy dá (díky Bolzanově větě) $[0, f(x_3)] \cup [f(x_4), +\infty)$. Z lichosti je tedy

$$\mathcal{H}_f = (-\infty, -f(x_4)] \cup [-f(x_3), f(x_3)] \cup [f(x_4), +\infty).$$

Druhá derivace. Přímočaře dostáváme, že

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x^2-2}}\left[\frac{-2x}{(x^2-2)^2}\left(1 - \frac{2x^2}{(x^2-2)^2}\right) - \frac{4x(x^2-2)^2 - 2x^2\cdot 2(x^2-2)\cdot 2x}{(x^2-2)^4}\right],$$

a tedy $f''(x) > 0$ právě tehdy, když $[] > 0$. Řešíme tedy

$$\begin{aligned}
-2x(x^4 - 6x^2 + 4) - 4x(x^2-2)(x^2 - 2 - 2x^2) &> 0\\
-x[x^4 - 6x^2 + 4 + 2(x^2-2)(-x^2-2)] &> 0\\
x[x^4 - 6x^2 + 4 + 2(-x^4+4)] &< 0\\
x[-x^4 - 6x^2 + 12] &< 0\\
x[x^4 + 6x^2 - 12] &> 0.
\end{aligned}$$

Jeden inflexní bod je tedy 0, pak ještě dva další, které vyjdou jako (reálné) kořeny právě nalezené bikvadratické rovnice. Konkrétně jde o $x_5 = -\sqrt{\sqrt{21}-3}$ a $x_6 = \sqrt{\sqrt{21}-3}$. Poznamenejme, že $x_6 < \sqrt{2}$ (a z lichosti $-\sqrt{2} < x_5$). Funkce je tedy konvexní na $(x_6, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, +\infty)$ a konkávní na $(0, x_6)$. Z lichosti je f konvexní na $(x_5, 0)$ a konkávní na $(-\infty, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, x_5)$.

Pro konstrukci grafu poznamenejme, že

$$x_1(= -x_4) < -\sqrt{2} < x_5(= -x_6) < x_2(= -x_3) < 0 < x_3 < x_6 < \sqrt{2} < x_4.$$

$\triangle$

(2) Okamžitě vidíme, že funkce je definována na celém $\mathbb{R}$ a je zde spojitá. Z rozkladu polynomu vidíme, že jediným průsečíkem je počátek. Evidentně není periodická a není sudá ani lichá (viz $f(1) = \sqrt[3]{13}$ a $f(-1) = -\sqrt[3]{3}$).

Limity. Z aritmetiky limit vidíme, že limita v $\pm\infty$ je $\pm\infty$. Standardně spočteme, že asymptota v $+\infty$ i $-\infty$ je přímka $y = x + \frac{5}{3}$. Díky Bolzanově větě je $\mathcal{H}_f = \mathbb{R}$.

První derivace. Snadno nalezneme $f'(x) = \frac{3x^2+10x+7}{3\sqrt[3]{x^2(x^2+5x+7)^2}}$ pro $x \neq 0$. Klasicky spočítáme, že $f'(0) = +\infty$. Vidíme, že derivace se nuluje v bodech $-\frac{7}{3}$ a -1. Evidentně tedy f roste na $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right], [-1, +\infty)$ a klesá na $\left[-\frac{7}{3}, -1\right]$. V bodě $-\frac{7}{3}$ je lokální maximum a v -1 je lokální minimum.

Druhá derivace. Přímočaře získáme, že (pro $x \neq 0$)

$$f''(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4(x^2+5x+7)^4}}\Bigg[(6x+10)(x(x^2+5x+7))^{\frac{2}{3}} - (3x^2+10x+7)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{(x^2+5x+7)+x(2x+5)}{\sqrt[3]{x(x^2+5x+7)}}\Bigg]$$

a tedy $f''(x) > 0$ právě tehdy, když $[] > 0$. To znamená, že

$$(6x+10)\sqrt[3]{x^2(x^2+5x+7)^2} - (3x^2+10x+7)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3x^2+10x+7}{\sqrt[3]{x(x^2+5x+7)}} > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x^2+5x+7)}}\cdot\left[(3x+5)\cdot x(x^2+5x+7) - \frac{1}{3}(3x^2+10x+7)^2\right] > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\left[(9x^2+15x)(x^2+5x+7) - (3x^2+10x+7)^2\right] > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\left[9x^4+60x^3+138x^2+105x - (9x^4+60x^3+100x^2+42x^2+140x+49)\right] > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\left[-4x^2-35x-49\right] > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\left[4x^2+35x+49\right] < 0$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot(x+7)(4x+7) < 0.$$

Získáváme tedy dva inflexní body, a to $-7, -\frac{7}{4}$. Bod 0 není inflexní, protože v něm není konečná první derivace, ale ke změně chování v tomto bodě dochází. Dohromady tedy je funkce f konvexní na $(-\infty,-7), \left(-\frac{7}{4}, 0\right)$ a konkávní na $\left(-7,-\frac{7}{4}\right), (0,+\infty)$.

K nakreslení grafu si uvědomme, že $-7 < -\frac{7}{3} < -\frac{7}{4} < -1 < 0$.

△

(3) Evidentně je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ a funkce je zde spojitá. Není proto sudá, lichá ani periodická. Jediným průsečíkem je počátek.

Limity. Pomocí aritmetiky limit vyjde limita v $\pm\infty$ je $\pm\infty$, limita v 3 zprava je $+\infty$ a zleva naopak $-\infty$. Funkce nemá asymptoty (limita $\frac{f(x)}{x}$ je nula, ale limita $f(x)$ není reálné číslo.).

První derivace. Snadno získáme $f'(x) = \frac{x-6}{3(x-3)^2\sqrt[3]{\frac{x}{(x-3)^2}}}$, což dává smysl v $\mathcal{D}_f \setminus \{0\}$. Standardně spočítáme $f'_{\pm}(0) = \mp\infty$. Vidíme tedy, že f má lokální maximum v 0 s $f(0) = 0$ a lokální minimum v 6 s $f(6) = \sqrt[3]{12}$. Funkce f roste na $(-\infty,0], [6,+\infty)$ a klesá na intervalech $[0,3), (3,6]$. Díky Bolzanově větě dostáváme, že $\mathcal{H}_f = (-\infty,0] \cup [\sqrt[3]{12},+\infty)$.

Druhá derivace. Jako obvykle získáme (v 0 nemá smysl zkoumat druhou derivaci)

$$f''(x) = \left(\frac{x-6}{3(x(x-3)^4)^{\frac{1}{3}}}\right)' = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{8}{3}}}\left[1\cdot x^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{4}{3}} - (x-6)\frac{(x-3)^4 + x\cdot 4(x-3)^3}{3x^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{8}{3}}}\right],$$

a $f''(x) > 0$ právě tehdy, když $[] > 0$, což je ekvivalentní s

$$x^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{4}{3}} - (x-6)\frac{(x-3)^{\frac{4}{3}} + 4x(x-3)^{\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}} > 0$$

$$\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}\left[3x(x-3)^{\frac{4}{3}} - (x-6)\left((x-3)^{\frac{4}{3}} + 4x(x-3)^{\frac{1}{3}}\right)\right] > 0$$

$$(x-3)^{\frac{1}{3}}\left[3x(x-3) - (x-6)(x-3+4x)\right] > 0$$

$$(x-3)^{\frac{1}{3}}\left[3x^2-9x-(x-6)(5x-3)\right] > 0$$

$$(x-3)^{\frac{1}{3}}\left[3x^2-9x-(5x^2-33x+18)\right] > 0$$

$$(x-3)^{\frac{1}{3}}(-2x^2+24x-18) > 0$$

$$(x-3)^{\frac{1}{3}}(x^2-12x+9) < 0.$$

Zjišťujeme, že máme dva inflexní body a to $x_1 = 6 - 3\sqrt{3}$, $x_2 = 6 + 3\sqrt{3}$. Bod 3 není inflexní, protože nepatří do definičního oboru, dochází zde ale ke změně znaménka. Dohromady tedy máme, že f je konvexní na intervalech $(-\infty, 0), (0, x_1), (3, x_2)$ a konkávní na $(x_1, 3), (x_2, +\infty)$. Pro nákres grafu poznamenejme, že $x_1 < 3 < x_2$.

$\triangle$

(4) Snadno nahlédneme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 5\}$ a f je zde spojitá. Z tvaru definičního oboru není periodická. Jediným průsečíkem je zjevně počátek. Můžeme si všimnout, že je lichá a není sudá. Stačí se tedy omezit na pravou polopřímku $[0, +\infty)$.

Limity. Díky aritmetice limit a vlastností funkcí vidíme, že limita v $+\infty$ je 0 a limita v 5 zprava, resp. zleva je $\frac{\pi}{2}$, resp. $-\frac{\pi}{2}$. Díky lichosti je limita v $-\infty$ rovna 0 a v bodě -5 je limita zprava, resp. zleva rovna $\frac{\pi}{2}$, resp. $-\frac{\pi}{2}$. Funkce f má v $+\infty$ i $-\infty$ triviální asymptotu $y = 0$.

První derivace. Snadno získáme, že $f'(x) = \frac{-8(x^2+25)}{(x^2-25)^2+64x^2}$, což dává smysl na celém $\mathcal{D}_f$ a vidíme, že všude je $f' < 0$. To znamená, že f klesá na $(-\infty, -5), (-5, 5), (5, +\infty)$. Z toho plyne, že funkce nemá žádné lokální extrémy a pomocí Bolzanovy věty vidíme, že $\mathcal{H}_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Druhá derivace. Standardně získáme

$$f''(x) = \frac{-8}{((x^2-25)^2+64x^2)^2}\left[2x((x^2-25)^2+64x^2) - (x^2+25)(2(x^2-25)\cdot 2x + 128x)\right],$$

a tedy $f''(x) > 0$ právě tehdy, když $[] < 0$. To je ekvivalentní nerovnosti

$$\begin{aligned}
x\left[(x^4 - 50x^2 + 25^2 + 64x^2) - (x^2+25)(2x^2 - 50 + 68)\right] &< 0\\
x\left[x^4 + 14x^2 + 25^2 - (x^2+25)(2x^2+14)\right] &< 0\\
x\left[x^4 + 14x^2 + 25^2 - (2x^4 + 64x^2 + 25\cdot 14)\right] &< 0\\
x\left[-x^4 - 50x^2 + 25\cdot(25-14)\right] &< 0\\
x\left(x^4 + 50x^2 - 275\right) &> 0\\
x(x^2+55)(x^2-5) &> 0.
\end{aligned}$$

Dostáváme tak tři inflexní body, a to $-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}$. Vidíme, že je f konvexní na $(\sqrt{5}, 5), (5, +\infty)$ a konkávní na $(0, \sqrt{5})$. Díky lichosti je konvexní i na $(-\sqrt{5}, 0)$ a konkávní na $(-\infty, -5), (-5, -\sqrt{5})$.

$\triangle$

(5) Vidíme, že funkce je definována na celém $\mathbb{R}$ a je zde spojitá. Průsečík s osou y má hodnotu $2 - 3\arctan 2$. Je dobré si všimnout, že toto číslo je záporné, to je vidět takto:

$$2 - 3\arctan 2 < 2 - 3\arctan 1 = 2 - 3\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{8-3\pi}{4} < 0,$$

jelikož $\pi > 3$. Průsečíky s osou x jsou řešení rovnice $|x-2| = 3\arctan(x+2)$, dá se nahlédnout, že jedno řešení máme pro $x > 2$ a druhé pro $x < 2$. Ten druhý navíc musí být pro nějaké záporné x. Zjevně tedy funkce není sudá, lichá ani periodická.

Poznámka. *To, že budou nějaké průsečíky je vidět i pomocí derivací později. Není třeba nějak hlouběji zkoumat jejich hodnotu.*

Limity. Triviálně platí, že limita v $\pm\infty$ je $+\infty$. Funkce má v $+\infty$ asymptotu tvaru $y = x - 2 - \frac{3\pi}{2}$ a v $-\infty$ asymptotu $y = -x + 2 + \frac{3\pi}{2}$.

První derivace. Snadno nalezneme, že $f'(x) = \operatorname{sign}(x-2) - \frac{3}{1+(x+2)^2}$, což platí pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Rutinně spočteme, že $f'_{\pm}(2) = \pm 1 - \frac{3}{17}$. Vidíme, že v bodě 2 je lokální minimum a $f(2) = -3\arctan 4 < 0$. Nahlédneme, že jinde derivace znaménko nemění. Dohromady tedy f roste na intervalu $[2, +\infty)$ a klesá na $(-\infty, 2]$.

Druhá derivace. Ihned získáme, že

$$f''(x) = \frac{6(x+2)}{(1+(x+2)^2)^2},$$

pro $x \neq 2$ (v tomto bodě nemá ani smysl zkoumat druhou derivaci). Evidentně je tedy v -2 inflexní bod a funkce je konvexní na $(-2, 2), (2, +\infty)$ a konkávní na $(-\infty, -2)$.

$\triangle$

(6) Zjevně je f spojitá na celém $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Průsečíky jsou $[-2, 0]$, $\left[\frac{2}{3}, 0\right]$, $[0, 64]$, vidíme tak, že f není sudá, lichá ani periodická.

Limity. Ihned máme, že limity v $\pm\infty$ jsou $+\infty$. V podstatě je zjevné, že $\frac{f(x)}{x}$ má limitu $\pm\infty$, f tedy nemá asymptoty.

První derivace. Přímočaře získáme $f'(x) = 2\log 3 \cdot (1 + \operatorname{sign} x) \cdot 3^{x+2|x|} \cdot (3^{x+2|x|} - 3)$ pro $x \neq 0$. Kritické body jsou ty, kde je derivace nulová, tj. body $x \in \{-2, \frac{2}{3}\}$ a ty, kde derivace neexistuje, tj. $x = 0$. Snadno spočítáme, že $f'_+(x) = -48\log 3$ a $f'_-(x) = 16\log 3$, zde tedy dochází ke změně znaménka derivace a je zde lokální maximum. Ve zbývajících dvou bodech je nutně lokální minimum. Dohromady máme, že f roste na $[-2, 0]$, $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ a klesá na intervalech $(-\infty, -2]$, $\left[0, \frac{2}{3}\right]$. Lokální minima jsou zároveň globální. Vidíme, že $\mathcal{H}_f = [0, +\infty)$.

Druhá derivace. Nemá smysl ji počítat v počátku. Mimo něj získáme, že

$$f''(x) = 2\log^2 3 \cdot (1 + 2\operatorname{sign} x)^2 \cdot 3^{x+2|x|} \cdot [2 \cdot 3^{x+2|x|} - 9].$$

Snadno nahlédneme, že inflexní body jsou $x_1 = -\log_3 \frac{9}{2}$ a $x_2 = \frac{1}{3}\log_3 \frac{9}{2}$. Celkem je f konvexní na $(-\infty, x_1), (x_2, +\infty)$ a konkávní na $(x_1, 0), (0, x_2)$.

Pro konstrukci grafu poznamenejme, že $-2 < x_1 < 0 < x_2 < \frac{2}{3}$.

$\triangle$

(7) Ihned vidíme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\log_2 9\}$ a f je zde spojitá. Kvůli tvaru definičního oboru nemůže být sudá, lichá a ani periodická. Snadno nalezneme průsečíky, kterými jsou body $\left[0, -\frac{11}{64}\right]$, $\left[\frac{1}{2}\log_2 12, 0\right]$.

Limity. Přímočaře získáme, že limita v $+\infty$ je 1 a v $-\infty$ vyjde $-\frac{4}{27}$, rovněž jednoduše máme, že limita ve vynechaném bodě je (z obou stran) rovna $+\infty$. Máme tedy triviální asymptoty $y = 1$ a $y = -\frac{4}{27}$.

První derivace. Snadno zjistíme, že $f'(x) = \frac{6\log 2 \cdot 2^x}{(2^x - 9)^3}[4 - 3 \cdot 2^x]$. Derivace se tedy nuluje pouze v bodě $\log_2 \frac{4}{3}$. Z tvaru derivace vidíme, že f roste na $\left[\log_2 \frac{4}{3}, \log_2 9\right)$ a klesá na $\left(-\infty, \log_2 \frac{4}{3}\right]$, $(\log_2 9, +\infty)$. V bodě $\log_2 \frac{4}{3}$ je lokální (a i globální) minimum s hodnotou $-\frac{92}{23^2} = -\frac{4}{23}$. Díky Bolzanovi je $\mathcal{H}_f = \left[-\frac{4}{23}, +\infty\right)$.

Druhá derivace. Máme

$$f''(x) = \frac{6\log 2}{(2^x - 9)^6}\left[(2^x(4 - 3 \cdot 2^x))'(2^x - 9)^3 - 2^x(4 - 3 \cdot 2^x) \cdot 3(2^x - 9)^2 2^x \log 2\right],$$

a tedy $f'' > 0$ právě tehdy, když $[] > 0$. Řešíme tedy nerovnost

$$\begin{aligned}
(4 \cdot 2^x \log 2 - 3 \cdot 2^{2x} \cdot 2\log 2)(x^2 - 9)^3 &> (4 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{2x}) \cdot 3\log 2 \cdot (2^x - 9)^2 \cdot 2^x \\
(4 - 3 \cdot 2^x \cdot 2)(2^x - 9) &> (4 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{2x}) \cdot 3 \\
4 \cdot 2^x - 6 \cdot 2^{2x} - 36 + 54 \cdot 2^x &> 12 \cdot 2^x - 9 \cdot 2^{2x} \\
3 \cdot 2^{2x} + 46 \cdot 2^x - 36 &> 0.
\end{aligned}$$

Řešením kvadratické rovnice s $y = 2^x$ je $y_{1,2} = \frac{-23 \pm \sqrt{637}}{3}$, smysl má jen pozitivní kořen, což dává $x_0 = \log_2 \frac{-23+\sqrt{637}}{3}$ a jedná se o inflexní bod. Dostáváme, že funkce f je konvexní na $(x_0, \log_2 9), (\log_2 9, +\infty)$ a konkávní na $(-\infty, x_0)$.

Pro graf poznamenejme, že $0 < x_0 < \log_2 \frac{4}{3} < \frac{1}{2}\log_2 12 < \log_2 9$ a $1 > -\frac{4}{27} > -\frac{11}{64} > -\frac{4}{23}$.

$\triangle$