VI. Derivace funkcí

Shrnutí teorie.

Definice. *(Derivace funkce) Buď f reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \ ,$$

pak tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě a a značíme ji $f'(a)$. Pomocí příslušné jednostranné limity zavádíme jednostranné derivace v bodě a a značíme je $f'_+(a)$ resp. $f'_-(a)$.

Příklad. Vezměme $f(x) = x$, pak máme, v libovolném $a \in \mathbb{R}$,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a+h-a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Příklad. Vezměme $f(x) = \log x$, pak máme, v libovolném $a > 0$ (jinde není f definována),

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log(a+h) - \log a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log(1 + \frac{h}{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log(1 + \frac{h}{x})}{x \cdot \frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \, .$$

Tvrzení. *(Aritmetika derivací) Nechť reálné funkce f a g mají vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom platí*

(a) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(b) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$.

(c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$, *jestliže* $g(a) \neq 0$.

Tvrzení. *(Derivace složené funkce) Nechť reálné funkce f, resp. g mají vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, resp. $x_0 \in \mathbb{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Potom platí*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Příklad. Vezměme $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x^2 + e^{3x}$, tyto funkce mají vlastní derivaci na celém svém definičním oboru, jímž je celá reálná osa. Buď tedy $x \in \mathbb{R}$ libovolný a $y := x^2 + e^{3x}$. Dle tvrzení platí vztah

$$(\sin(x^2 + e^{3x}))' = (f(g(x_0)))' = \underbrace{f'(y_0)}_{=\cos y} \cdot \underbrace{g'(x_0)}_{=2x+3e^{3x}} = (2x + 3e^{3x}) \cos(x^2 + e^{3x}).$$

Tvrzení. *(Derivace inverzní funkce) Nechť reálná funkce f je na intervalu (a,b) spojitá a ryze monotónní. Předpokládejme, že v bodě $x_0 \in (a,b)$ existuje její vlastní a nenulová derivace. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \ .$$

Příklad. Uvažujme funkce $f(x) = \sin x$, $g(x) = \tan x$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, zde jsou tedy f, g spojité a rostoucí. Buď $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ libovolný, pak $f'(x) = \cos x \neq 0$ a $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$. Označme $y := \sin x$, resp. $y := \tan x$, dle tvrzení dostáváme

$$(\arcsin y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \ ,$$

$$(\arctan y)' = (g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(x)} = \cos^2 x = (\cos(\arctan y))^2 = \frac{1}{1+y^2} \ .$$

Tvrzení. *(Výpočet jednostranné derivace) Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \to a_+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} f'(x).$$

Levostranná varianta je analogická.

Příklad. Vezměme funkci $f(x) = \sqrt{x}$, její definiční obor je $\langle 0, +\infty)$, je spojitá na $(0, \infty)$ a spojitá zprava v 0. Na (otevřeném) intervalu $(0, \infty)$ je její derivace dána vztahem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Dle tvrzení můžeme spočítat, že $f'_+(0) = \lim_{x \to 0_+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$.

Příklad 1. [Pochopení pojmu] Z definice určete derivace zadané funkce f, určete definiční obory f, f':

(a) $f(x) = 8$.
(b) $f(x) = x^2$.
(c) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$.
(d) $f(x) = \sin x$.
(e) $f(x) = e^x$.
(f) $f(x) = 2^x$.
(g) $f(x) = \sqrt{5x-8}$.
(h) $f(x) = |x|$.

Příklad 2. [Elementární příklady] Najděte derivaci funkce f, určete definiční obory f, f':

(a) $f(x) = 3x^5 - 17x^3 + \sqrt{3}x - 8$.
(b) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$.
(c) $f(x) = x + 2\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}$.
(d) $f(x) = x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{\sqrt{x}}$.
(e) $f(x) = x \log x + x \log_3 x$.
(f) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.
(g) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0\rangle \\ \log(1+x), & x \in (0, \infty) \end{cases}$.
(h) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in (-\infty, 1) \\ (1-x)(2-x), & x \in \langle 1, 2\rangle \\ -(2-x), & x \in (2, \infty) \end{cases}$.

Příklad 3. [Složené funkce] Najděte derivaci funkce f, určete definiční obory f, f':

(a) $f(x) = (x^2 + 51x + 119)^{87}$.
(b) $f(x) = x^3(x+2)^8(x-7)^{11}$.
(c) $f(x) = \log(x^2 + x + 2)$.
(d) $f(x) = \cos(x^3 - x + 2)^9$.
(e) $f(x) = x|x| + 1$.
(f) $f(x) = 2\log\frac{x^2-1}{x^2+1}$.
(g) $f(x) = \sin^2 x - \sin(x^2)$.
(h) $f(x) = \log(\log^2(\log^3 x))$.
(i) $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$.
(j) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$.
(k) $f(x) = \frac{x^2(1-x)^3}{1+x}$.
(l) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.
(m) $f(x) = x^x$.
(n) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.
(o) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$.
(p) $f(x) = \arcsin(\cos x)$.
(q) $f(x) = \log(\arccos x)$.
(r) $f(x) = \log(\arctan x)$.
(s) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{2}}{x}$.
(t) $f(x) = x \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \arctan\sqrt[3]{x}$.
(ť) $f(x) = (x+1)\cdot\arccos\frac{2x}{x^2+1}$.
(u) $f(x) = e^{x^2-1} - \log\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.
(v) $f(x) = \arctan\sqrt{x^2-1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}$.
(w) $f(x) = (\arctan x)^{\arcsin x}$.
(x) $f(x) = x(\arcsin(x^3))^2$.
(y) $f(x) = e^{\frac{1}{\log|x|}}$.
(z) $f(x) = |\log|x||$.

Příklad 4. [Zkouškové příklady] Vyšetřete spojitost a spočtěte derivaci zadané funkce:

(a) $f(x) = \cos(\max\{x, x^2\})$.
(b) $f(x) = \operatorname{sign}(x^3 - 4x)\cdot\sin(x^3 - 2x^2)$.
(c) $f(x) = \sqrt[3]{3^{|x^2-1|} - 3}$.
(d) $f(x) = (\cos x)^{\min\{2, x^3+x^2-2x+2\}} =: (\cos x)^{g(x)}$.
(e) $f(x) = x^2 \cdot \left\lfloor \frac{4}{\pi}\arctan x \right\rfloor$.
(f) $f(x) = \max\{x, 1-x^2, (x-1)^2\}$.
(g) $f(x) = \arctan(x-1)\cdot\left|\arctan^2 x - \frac{\pi^2}{16}\right|$.
(h) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + x)\cdot\left\lfloor \frac{4}{\pi}\arctan x \right\rfloor$.
(i) $f(x) = \left(\operatorname{arccot} x - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt[3]{\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \frac{1}{2}}$.
(j) $f(x) = \arccos(\min\{2x^2, x+1\})$.
(k) $f(x) = \sqrt{1 - (x^2-1)^4}$.
(l) $f(x) = \sqrt{||x| - 2|}\cdot(\cos x - 1)$.
(m) $f(x) = \operatorname{sign}(x^3 + x^2 - 2x)(e^{x^3-2x^2+x} - 1)$.

Výsledky - VI. Derivace funkcí

Příklad 1. [Pochopení pojmu]

(a) $f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

(b) $f'(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$.

(c) $f'(x) = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

(d) $f'(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$.

(e) $f'(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$.

(f) $f'(x) = 2^x \log 2, x \in \mathbb{R}$.

(g) $f'(x) = \begin{cases} \frac{5}{2\sqrt{5x-8}}, & x \in (\frac{8}{5}, +\infty) \\ +\infty, & x = 0_+ \end{cases}.$

(h) $f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} = \text{sgn } x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \text{Neexistuje}, & x = 0 \end{cases}.$

Příklad 2. [Elementární příklady]

(a) $f'(x) = 15x^4 - 51x^2 + \sqrt{3}, x \in \mathbb{R}$.

(b) $f'(x) = (x^2 + 1)e^x, x \in \mathbb{R}$.

(c) $f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}, & x > 0 \\ +\infty, & x = 0_+ \end{cases}.$

(d) $f'(x) = \frac{3}{x\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x^3}}, x > 0$.

(e) $f'(x) = (1 + \log x)(1 + \frac{1}{\log 3}), x > 0$.

(f) $f'(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x \log \frac{3}{2}, x \in \mathbb{R}$.

(g) $f'(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x}, & x > 0 \end{cases}.$

(h) $f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ 2x - 3, & x \in \langle 1, 2 \rangle \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$

Příklad 3. [Složené funkce]

(a) $f'(x) = 87(2x + 51)(x^2 + 51x + 119)^{86}, x \in \mathbb{R}$.

(b) $f'(x) = (22x^2 - 49x - 42)x^2(x + 2)^7(x - 7)^{10}, x \in \mathbb{R}$.

(c) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+2}, x \in \mathbb{R}$.

(d) $f'(x) = 9(1 - 3x^2)(x^3 - x + 2)^8 \sin(x^3 - x + 2)^9, x \in \mathbb{R}$.

(e) $f'(x) = 2x \cdot \text{sgn } x, x \in \mathbb{R}$.

(f) $f'(x) = \begin{cases} \frac{8x}{x^4-1}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ -\infty, & x = -1_- \\ +\infty, & x = 1_+ \end{cases}.$

(g) $f'(x) = 2 \sin x \cos x - 2x \cos(x^2), x \in \mathbb{R}$.

(h) $f'(x) = \frac{6}{x \cdot \log x \cdot \log(\log^3 x)}, x \in (1, e) \cup (e, +\infty)$.

(i) $f'(x) = \cos[\sin(\sin x)] \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x, x \in \mathbb{R}$.

(j) $f'(x) = \frac{9}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}, x \in (-3, 3)$.

(k) $f'(x) = \frac{-2x(2x^2+2x-1)(1-x)^2}{(1+x)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(l) $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(m) $f'(x) = (1 + \log x)x^x, x > 0$.

(n) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}(1 + \log \frac{1}{x}) \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}, x > 0$.

(o) $f'(x) = (-\sin x \cdot \log(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x})(\sin x)^{\cos x},\ x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi, (2k+1)\pi)$.

(p) $f'(x) = \begin{cases} -\mathrm{sgn}\ (\sin x), & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \\ -1, & x \in \{2k\pi_+, (2k+1)\pi_-\},\ k \in \mathbb{Z}. \\ 1, & x \in \{2k\pi_-, (2k+1)\pi_+\},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

(q) $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\arccos x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1, 1) \\ -\infty, & x = -1_+ \end{cases}.$

(r) $f'(x) = \frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2},\ x > 0$.

(s) $f'(x) = \frac{1}{2+x^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(t) $f'(x) = \begin{cases} \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)} + \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{1+x^{\frac{2}{3}}}, & x > 0 \\ +\infty, & x = 0_+ \end{cases}.$

(ť) $f'(x) = \begin{cases} \arccos \frac{2x}{x^2+1} + 2\mathrm{sign}\,(x^2 - 1)\frac{x+1}{x^2+1}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \\ \pi, & x = -1 \\ 2, & x = 1_+ \\ -2, & x = 1_- \end{cases}.$

(u) $f'(x) = 2xe^{x^2-1} - \frac{1}{e^{2x}-1}, x \in \mathbb{R}$.

(v) $f'(x) = \frac{x \log x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}, x > 1$.

(w) $f'(x) = \begin{cases} (\arctan x)^{\arcsin x} \left(\frac{\log(\arctan x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right), & x \in (0, 1) \\ -\infty, & x = 1_- \end{cases}.$

(x) $f'(x) = \begin{cases} (\arcsin(x^3))^2 + \frac{6x^3 \cdot \arcsin(x^3)}{\sqrt{1-x^6}}, & x \in (-1, 1) \\ +\infty, & x = -1_+ \\ +\infty, & x = 1_- \end{cases}.$

(y) $f'(x) = -\frac{1}{x \log^2 |x|}e^{\frac{1}{\log |x|}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$.

(z) $f'(x) = \frac{\log |x|}{x|\log |x||}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 4. [Zkouškové příklady]

(a) $f'(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \in (0, 1) \\ -2x \sin(x^2), & x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ 0, & x = 0 \\ -\sin 1, & x = 1_- \\ -2 \sin 1, & x = 1_+ \end{cases}.$

(b) $f'(x) = \begin{cases} (3x^2 - 4x) \cdot \mathrm{sgn}\ (x^3 - 4x) \cdot \cos(x^3 - 2x^2), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 2\} \\ 0, & x = 0 \\ -4, & x = 2_- \\ 4, & x = 2_+ \\ \infty, & x = -2 \end{cases}.$

(c) $f'(x) = \begin{cases} \frac{\log 3 \cdot 3^{|x^2-1|} \cdot 2x \cdot \mathrm{sgn}\ (x^2-1)}{3(3^{|x^2-1|}-3)^{\frac{2}{3}}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1, \pm\sqrt{2}\} \\ -\infty, & x \in \{-\sqrt{2}, 0_+\} \\ +\infty, & x \in \{\sqrt{2}, 0_-\} \\ -\frac{\sqrt[3]{2}}{3} \log 3, & x \in \{1_-, -1_+\} \\ \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \log 3, & x \in \{1_+, -1_-\} \end{cases}.$

(d) $$f'(x)=\begin{cases} e^{g(x)\log(\cos x)}\cdot(g'(x)\cdot\log(\sin x)-g(x)\cdot\tan x), & x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)\setminus\{0,1\}\\ 0, & x=0\\ -2\cos^2 1\cdot\tan 1, & x=1_+\\ -\cos^2 1\cdot(2\tan 1-3\log(\cos 1)), & x=1_- \end{cases}.$$

(e) $$f'(x)=\begin{cases} -4x, & x\in(-\infty,-1)\\ -2x, & x\in(-1,0)\\ 0, & x\in(0,1)\\ 2x, & x\in(1,\infty)\\ 0, & x=0\\ +\infty, & x\in\{-1_-,1_-\}\\ 0, & x\in\{-1_+,1_+\} \end{cases}.$$

(f) $$f'(x)=\begin{cases} 1, & x\in(\frac{-1+\sqrt5}{2},\frac{3+\sqrt5}{2})\\ -2x, & x\in(0,\frac{-1+\sqrt5}{2})\\ 2(x-1), & x\in(-\infty,0)\cup(\frac{3+\sqrt5}{2},+\infty)\\ 2-2\sqrt5, & x=(\frac{-1+\sqrt5}{2})_-\\ \frac{-1+\sqrt5}{2}, & x=(\frac{-1+\sqrt5}{2})_+\\ 1, & x=(\frac{3+\sqrt5}{2})_-\\ 1+\sqrt5, & x=(\frac{3+\sqrt5}{2})_+\\ -2, & x=0_-\\ 0, & x=0_+ \end{cases}.$$

(g) $$f'(x)=\begin{cases} \frac{|\arctan^2 x-\frac{\pi^2}{16}|}{1+(1-x)^2}+\arctan(x-1)\cdot\operatorname{sgn}\,(\arctan^2 x-\frac{\pi^2}{16})\cdot\frac{2\arctan x}{1+x^2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}\\ 0, & x=1\\ -\frac{\pi}{4}\arctan 2, & x=-1_+\\ \frac{\pi}{4}\arctan 2, & x=-1_- \end{cases}.$$

(h) $$f'(x)=\begin{cases} -2\cdot(3x^2-4x+1), & x\in(-\infty,-1)\\ -(3x^2-4x+1), & x\in(-1,0)\\ 0, & x\in(0,1)\\ 3x^2-4x+1, & x\in(1,\infty)\\ 0, & x=1\\ -1, & x=0_-\\ 0, & x=0_+\\ -\infty, & x=-1_-\\ -8, & x=-1_+ \end{cases}.$$

(i) $$f'(x)=\begin{cases} -\frac{\sqrt[3]{\sin^2\frac{\pi x}{4}-\frac12}}{1+x^2}+\frac{(\operatorname{arccot}\,x-\frac{\pi}{4})}{3}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{4}\cdot\cos\frac{\pi x}{4}}{(\sin^2\frac{\pi x}{4}-\frac12)^{\frac23}}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{2k+1;k\in\mathbb{Z}\}\\ 0, & x=1\\ +\infty, & x=2k+1 \text{ pro } k>0 \text{ liché nebo } k<0 \text{ sudé}\\ -\infty, & x=2k+1 \text{ pro } k<0 \text{ liché nebo } k>0 \text{ sudé} \end{cases}$$

(j) $$f'(x)=\begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}, & x\in(-2,-\frac12)\\ \frac{-4x}{\sqrt{1-4x^4}}, & x\in(-\frac12,\frac{\sqrt2}{2})\\ -\infty, & x=-2_+\\ -\infty, & x=(\frac{\sqrt2}{2})_-\\ \frac{4}{\sqrt3}, & x=(\frac{-1}{2})_+\\ -\frac{2}{\sqrt3}, & x=(\frac{-1}{2})_- \end{cases}.$$

$$\text{(k)}\quad f'(x)=\begin{cases}-\frac{4x(x^2-1)^3}{\sqrt{1-(x^2-1)^4}}, & x\in(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})\\ -2, & x=0_-\\ 2, & x=0_+\\ +\infty, & x=-\sqrt{2}+\\ -\infty, & x=\sqrt{2}-\end{cases}.$$

$$\text{(l)}\quad f'(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sign}(|x|-2)}{2\sqrt{||x|-2|}}\cdot\operatorname{sign}x\cdot(\cos x-1)-\sqrt{||x|-2|}\sin x, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0,\pm2\}\\ 0, & x=0\\ -\infty, & x=\pm2_+\\ +\infty, & x=\pm2_-\end{cases}.$$

$$\text{(m)}\quad f'(x)=\begin{cases}\operatorname{sign}(x^3+x^2-2x)e^{x^3-2x^2+x}(3x^2-4x+1), & x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0,1\}\\ 0, & x=1\\ -\infty, & x=-2\\ -1, & x=0_+\\ 1, & x=0_-\end{cases}.$$