VII. Průběh funkce

Postup při vyšetřování funkce.

- Na začátku.
  - Definiční obor f.
  - Spojitost funkce.
  - Průsečíky s osami. Případně "zajímavé" hodnoty.
  - Sudost/lichost a periodicita. Často je z tvaru $\mathcal{D}_f$ jasné, že nemůže být to či ono, případně s pomocí průsečíků. Nebo je naopak zjevné, že je např. sudá (co se děje po dosazení $-x$?). Občas se toto dobře odůvodní až při kreslení grafu.

  Je-li f sudá/lichá, tak se omezím na množinu $\mathcal{D}_f \cap [0, +\infty)$ a zkoumám vlastnosti funkce zde. Je-li f periodická, tak se omezím na nějaký interval, který má délku této periody. Na konci nezapomenu načrtnout celý graf, či okomentovat co se děje ve vynechané části.
- Limity
  - Spočítáme limity v krajních bodech definičního oboru. Typicky se jedná o hodnoty v $\pm\infty$ a v pár bodech vyřazených z definičního oboru. Obvykle není problematické.
  - Asymptoty v nekonečnech. Zkoumáme limity $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =: k$ a $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) =: q$, asymptota, pak má tvar $kx+q$. Totéž v $-\infty$. Můžeme získat celkem žádnou (k či q neexistují), jednu nebo dvě různé asymptoty. Tato informace nám říká, že se funkce v daném směru přimyká k této nalezené přímce.
  - Načrtnu si kostru grafu. Vidím definiční obor, průsečíky, limity. To mi říká, že funkce někde určitě roste/klesá, někde musí mít extrém daného typu...
- První derivace.
  - Mechanický výpočet první derivace v maximálním otevřeném intervalu.
  - Určení definičního oboru f'.
  - Spočítání f' ve zbývajících bodech - vzorec využívající jednostrannou spojitost nebo případně definice (nemáme-li příslušnou jednostrannou spojitost).
  - Znaménka derivace, její kořeny.
  - Intervaly monotonie. Musí korespondovat s dosavadním náčrtkem.
  - Lokální (globální) extrémy f.
- Druhá derivace.
  - Mechanický výpočet druhé derivace v maximálním otevřeném intervalu.
  - Obvykle není nutné se zaobírat výpočtem jednostranných druhých derivací, nicméně v principu to možné je.
  - Znaménka druhé derivace. Často neupravujeme celou druhou derivaci, často se vytknou kladné faktory, kterými se není třeba zaobírat.
  - Intervaly konvexity/konkávnosti funkce f.
  - Inflexní body.
- Graf.
  - Obor hodnot. Na to nám stačí znalost extrémů a limit, používáme Bolzanovu větu.
  - Uspořádání důležitých bodů – průsečíky, extrémy, inflexní body, asymptoty, singulární body, vyznačíme limity.
  - Náčrtek grafu – musí být vidět změna konvexity a konkavity, extrémy, limity v krajních bodech. Pokud to nejde nakreslit, tak máme někde chybu (např. vlastní limita v nekonečnu a přitom má být funkce konvexní či funkce klesá do $+\infty$).

Příklad 1. [Zahřívací příklady] Vyšetřete průběh funkce f:

(a) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$.

(b) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.

(d) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

(e) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{x^2+1}$.

(f) $f(x) = \frac{x^4+8}{x^3+1}$.

(g) $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-|x|}$.

(h) $f(x) = 2x - \tan x$.

(i) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}e^{-x}$.

(j) $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

(k) $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$.

(l) $f(x) = \frac{|x+1|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

(m) $f(x) = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

(n) $f(x) = \sin x + \cos^2 x$.

(o) $f(x) = |\sin x| + \cos 2x$.

(p) $f(x) = e^{-x^2+3x-7}$.

(q) $f(x) = \arcsin(\cos^2 x)$.

(r) $f(x) = \arctan \frac{x+1}{x-1}$.

(s) $f(x) = \arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

(t) $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.

(u) $f(x) = |x| + \arctan |x-1|$.

(v) $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(w) $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$.

(x) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \arctan \frac{x}{x^2-1}}$.

Příklad 2. [Zkouškové příklady] Vyšetřete průběh funkce f:

(a) $f(x) = |x+3| + 2\arctan|x+1|$.

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x + 1}$ pro $x \geq 0$.

(c) $f(x) = \frac{4^x - 12}{(2^x-9)^2}$.

(d) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x-3}}$.

(e) $f(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x^3}\right)$.

(f) $f(x) = \sqrt[4]{|x^4 - 5x^2 + 4|}$.

(g) $f(x) = xe^{\frac{1}{x^2-2}}$.

(h) $f(x) = \arctan \frac{2}{x} + \log(x^2+4) - \frac{x}{4}$.

(i) $f(x) = \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{\sin x + \frac{3}{\sqrt{2}}}$.

(j) $f(x) = \arctan\left(\frac{8x}{x^2-25}\right)$.

(k) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 7x}$.

(l) $f(x) = \frac{x\sqrt[9]{x}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}-3}}$.

(m) $f(x) = xe^{-\frac{1}{\log^2 x}}$.

(n) $f(x) = \log\left(4x^2 + \frac{1}{x}\right)$.

(o) $f(x) = (3^{x+2|x|} - 9)^2$.

(p) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+2x+1}{x+2}}$.

(q) $f(x) = \arctan \frac{1}{x^3-1}$.

(r) $f(x) = |x-2| - 3\arctan(x+2)$.

(s) $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{e^{|x+1|}}$.

(t) $f(x) = \frac{9^x - 54}{(3^x-12)^2}$.

Příklady nejsou řazeny podle obtížnosti. Doporučuji si vyzkoušet ty opakující se typové příklady – např. $(a), (c), (d), (j), (k), (m), (s)$.

Výsledky se dají najít na stránkách dřívějších přednášejících. Grafy si ale můžete (téměř vždy) dobře zkontrolovat pomocí GeoGebry či WolframAlphy.