III. Limity posloupností

Shrnutí teorie.

Definice. (Limita posloupnosti) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je **vlastní limita posloupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Taková posloupnost tzv. **konverguje** (k A). Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $+\infty$ (či $-\infty$), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K \text{ (či } < K).$$

Taková posloupnost tzv. **diverguje** k $+\infty$ (či $-\infty$).

Tvrzení. (Jednoznačnost limit) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Tvrzení. (O vybrané posloupnosti) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel s limitou $A \in \mathbb{R}^*$. Buď posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom už $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Tvrzení. (Aritmetika limit) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel a mějme $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Mají-li příslušné pravé strany smysl, tak platí

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B, \quad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Pozn. *Pracujeme s rozšířenou reálnou osou* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. *Následující operace nejsou dobře definovány:*

$$(+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad (+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty),$$
$$(\pm\infty) \cdot 0, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{-\infty}{-\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \quad \frac{-\infty}{+\infty}, \quad \frac{a}{0} \ \text{pro } a \in \mathbb{R}^*.$$

Tvrzení. (Dva policajti) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N}, \, n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$ a

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \in \mathbb{R}^*$,

potom je $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

Tvrzení. (Limita součinu omezené a mizející posloupnosti) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující

(i) $\{a_n\}_n$ je omezená a

(ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$,

potom je $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Tvrzení. (Záměna limity a odmocniny) Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel a $p \in \mathbb{N}$. Potom platí:

(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[p]{A}$ je-li p liché.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[p]{A}$ je-li p sudé a $\exists n_0 > 0 : a_n \geq 0$ pro všechna $n \geq n_0$.

Tvrzení. (Škála: $\log^{\text{něco}} n \ll n^{\text{něco}} \ll \text{něco}^n \ll n! \ll n^n$) Platí:

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log^\alpha n}{n^\beta} = 0$ pro α, $\beta > 0$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0$ pro $a > 1$ a $\beta > 0$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ pro $a > 0$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Tvrzení. (n-tá odmocnina) Platí:

(i) Pro $a > 0$ je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Příklad 1. (Elementární) Uhodněte limity a ověřte je z definice:

(a) $\lim_{n\to\infty} 2$.

(b) $\lim_{n\to\infty} n$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}$.

(d) $\lim_{n\to\infty} n^3$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$.

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+7}{n}$.

(h) $\lim_{n\to\infty} e^n$.

(i) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

(j) $\lim_{n\to\infty} \log n$.

(k) $\lim_{n\to\infty} \arctan(-n)$.

(l) $\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{n}$.

Příklad 2. (Oscilace) Určete limity (pokud existují):

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

(b) $\lim_{n\to\infty} (-2)^n$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+1}{2}$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos \pi n}{n^2}$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$.

(f) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt[3]{n}$.

(g) $\lim_{n\to\infty} \sin(\pi n)$.

(h) $\lim_{n\to\infty} \sin \frac{\pi n}{2}$.

Příklad 3. (Racionální funkce) Určete limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{2n^3-n^2+2}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n-6}{-n+2} + \frac{2}{n^2}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4-2n^3+n}{5n^4+2n^2}$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{n^3}+1}{n-1} + \frac{\sqrt{n^2+1}}{n-2}$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$.

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!-(n+1)!}{(n+3)!+(n+1)!}$.

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}$.

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2)^{10}-n^{20}}{(n+3)^{19}-n^{19}}$.

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+15n)^{10}-(n^2+10)^{15}}{(n^3+2n^2+1)^9-(n+1)^{27}}$.

Příklad 4. (Odmocniny) Určete limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+11}+\sqrt{n}}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+11} - \sqrt{n}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n^3+n^2}-\sqrt{n^3+1}}$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})}{\sqrt{n^2-1}-(n+2)}$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{n}} \cdot \frac{\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-1}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n+2}}$.

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+6}-\sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[3]{n^2+5}-\sqrt[3]{n^2+1}}$.

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}-\sqrt[3]{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+3n}}$.

(h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt[3]{n^3-1}$.

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^{10}+1}-\sqrt{(n+4)^{10}+1}}{n^4+2n+3}$.

(j) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(2n+1)^{10}-(2n)^{10}-1}-\sqrt{(2\sqrt{n}+1)^{18}-1}}{\sqrt{n^{10}-2n^9\sqrt{n}}-n^5}$.

(k) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+\sqrt{n}}-\sqrt{n^3-\sqrt{n}}}{n(\sqrt[3]{n^6+1}-\sqrt{n^4-1})}$.

(l) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt[4]{n^4+n^3}}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt[3]{n^3+2n}}$.

Příklad 5. (Škála) Určete limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n+n^7+1}{n^8+n!}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log^3 n+6n^2+n+\log n}{1+\log n^2+n^2}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}+2^n+n^{19}}{n!+4(n+1)n^n}$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^{2n}+n}+n!}{n^n+\sqrt{3^n+1}}$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+4^{n+1}}+\sqrt{2^{2n}+n^2}}{n^5-2^{n+3}}$.

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3\cdot 2^n+n}-\sqrt{2^{n+1}-5!}}{\sqrt{2^n+n}}$.

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3^n+n^3}-\sqrt{3^n+3}}{\sqrt{3^n+n^2}-\sqrt{3^n-n}}$.

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{\frac{n}{2}}(\sqrt{n^n-2^n}-\sqrt{n!+n^n})}$.

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{\sqrt[3]{n^{3n}+n^{2n+2}+n^2}-\sqrt[3]{n^{3n}-n^4}}$.

(j) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n!}(2^{2n}-3^n)}{\sqrt{(n+1)!+2^n}-\sqrt{n!+3^n}}$.

(k) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2^{2n}+n^2}-\sqrt[3]{2^{3n}+1}}{2^{-n}(\sqrt{n^8+2n^6}-\sqrt{n^8+1})}$.

(l) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n\sqrt{4^n+5n^4}-4^n}{n^4+2}$.

Příklad 6. (n-tá odmocnina) Určete limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{n^4+3^n+2^n}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\arctan n+5^n}}{\sqrt[2n]{6^n+\sqrt{n}}}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n^2+n}-n\sqrt{4^n+1}}{\sqrt[n]{2^{n^2}+1}}$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n+3^n\sin 2^n}{5^n+4^n\cos(n!)}}$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n+\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$.

(f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})$.

(g) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2-(n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3-n^3-3n^2)^{n-1}}}$.

(h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{(18+36+\cdots+18n)^n}{(3n+1)^{2n}+(n+3)^{2n}}}$.

(i) $\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\sqrt[n]{n^{2n}+(2n)^n}}{\sqrt[n]{n^{3n}+(3n)^n}}$.

Příklad 7. (Celá část) Určete limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\left\lfloor\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \left\lfloor\sqrt[3]{n^3+8n^2}-\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right\rfloor$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor^3}{n-\lfloor\sqrt{n+9}\rfloor}$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor k\alpha\rfloor$.

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n^3+1}\rfloor+\lfloor\sqrt{n^3-1}\rfloor}{\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+n^n}}$.

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor+\lfloor 2\sqrt{n}\rfloor+\cdots+\lfloor n\sqrt{n}\rfloor}$.

(h) $\lim_{n\to\infty} \left\lfloor\sqrt[n]{n^{\log n}+e^n+(\log n)^{\sqrt{n}}}\right\rfloor$.

Výsledky - III. Limity posloupností

Příklad 1. (Elementární)

(a) 2.
(b) $+\infty$.
(c) $+\infty$.
(d) $+\infty$.
(e) 0.
(f) 0.
(g) 1.
(h) $+\infty$.
(i) 0.
(j) $+\infty$.
(k) $-\frac{\pi}{2}$.
(l) 0.

Příklad 2. (Oscilace)

(a) 0.
(b) Neexistuje.
(c) Neexistuje.
(d) 0
(e) 0
(f) Neexistuje.
(g) 0
(h) Neexistuje.

Příklad 3. (Racionální funkce)

(a) 0.
(b) $-\infty$.
(c) $\frac{1}{5}$.
(d) $+\infty$.
(e) $-\frac{1}{2}$.
(f) 1.
(g) $\frac{1}{2}$.
(h) $\frac{20}{57}$.
(i) $\frac{125}{3}$.

Příklad 4. (Odmocniny)

(a) 0.
(b) 0.
(c) 2.
(d) $\frac{3}{4}$.
(e) $-\frac{3}{2}$.
(f) 1.
(g) $-\frac{1}{3}$.
(h) $\frac{1}{2}$.
(i) -15.
(j) $32(16-\sqrt{5})$.
(k) 2.
(l) $\frac{1}{6}$.

Příklad 5. (Škála)

(a) 0.
(b) 6.
(c) $\frac{1}{4}$.
(d) 1.
(e) $-\frac{3}{8}$.
(f) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.
(g) $+\infty$.
(h) -2.
(i) 3.
(j) $+\infty$.
(k) $\frac{1}{2}$.
(l) $\frac{5}{2}$.

Příklad 6. (n-tá odmocnina)

(a) 4.
(b) $\frac{5}{\sqrt{6}}$.
(c) $-\infty$.
(d) $\frac{4}{5}$.
(e) 1.
(f) 0.
(g) $\frac{2}{3}$.
(h) 1.
(i) 1.

Příklad 7. (Celá část)

(a) $\frac{1}{2}$.
(b) $+\infty$.
(c) 1.
(d) 2.
(e) $\frac{\alpha}{2}$.
(f) $+\infty$.
(g) 2.
(h) 2.