

VI. Stabilita

Příklad 1. Uvažujme matici

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro jaké počáteční podmínky $\mathbf{x}_0$ je nulové řešení rovnice $\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x}$ stabilní, resp. asymptoticky stabilní? [Stabilita pro $\langle(1, -1, 1)^\top, (1, 0, 1)^\top\rangle$ a as. stabilita pro $\langle(1, -1, 1)^\top\rangle$.]

Příklad 2. Mějme matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňující $\mathbb{A}^2 = -\mathbb{A}$.

- (i) Spočítejte $e^{t\mathbb{A}}$, respektive najděte $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňující $e^{t\mathbb{A}} = \mathbb{B} + \mathbb{C}e^{-t}$.
 - (ii) Pomocí předešlého rozhodněte o stabilitě nulového řešení $\mathbf{x} = \mathbb{A}\mathbf{x}$.
 - (iii) Najděte vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a s jejich pomocí rozhodněte o stabilitě nulového řešení $\mathbf{x} = \mathbb{A}\mathbf{x}$.
- [(i) je přímočaré a dostaneme asymptotickou stabilitu. Ve spektru je nejvýše 0 a -1 , závisí na regularitě.]

Příklad 3. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= -(x^2 + y^2)y, \\ y' &= (x^2 + y^2)x. \end{aligned}$$

- (i) Lze rozhodnout o stabilitě počátku pomocí linearizované soustavy?
- (ii) Převed'te soustavu do polárních souřadnic a rozhodněte o stabilitě počátku.
- (iii) Jsou jiná řešení stabilní?

[Nelze. Převodem do pol. souřadnic najdeme $r' = 0$ a $\varphi' = r^2$, takže nulové je stabilní, ostatní nikoliv.]

Příklad 4. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= -3x + 2\sin y + z, \\ y' &= (x - y)(z - 2), \\ y' &= x + 2xy - z. \end{aligned}$$

- (i) Najděte linearizaci v počátku.
- (ii) Rozhodněte o stabilitě linearizované a původní soustavy.
- (iii) Pro linearizovanou soustavu najděte X_0 a určete dimenze prostorů X_- , X_+ , X_0 .

[$\lambda = 0, \pm\sqrt{3}$, obojí je nestabilní, dimenze jsou jedna a $X_0 = \langle(1, 1, 1)^\top\rangle$.]

Příklad 5. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= y + 2 + x(y + 2), \\ y' &= -x - x(y + 2) + x^3. \end{aligned}$$

- (i) Najděte stacionární body soustavy.
 - (ii) Najděte linearizované soustavy v těchto bodech.
 - (iii) Rozhodněte o stabilitě stac. bodů lin. soustavy. Co víte o stabilitě stac. bodů pro původní soustavu?
- [(0, -2) stabilní a nevíme, (1, -2) obojí nestabilní (sedlo) a (-1, -2) obojí nestabilní.]

Příklad 6. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= (x + y)^2 - 1, \\ y' &= y^2 - 4. \end{aligned}$$

- (i) Najděte stacionární body soustavy.
- (ii) Rozhodněte o (asymptotické) stabilitě stacionárních bodů ležících v pravé polorovině.
- (iii) Pro bod s největší x -ovou složkou načrtněte trajektorie řešení na jeho okolí.

[Body $(\pm 1, \mp 2)$, $(\pm 3, \mp 2)$, bod $(1, -2)$ je asymptoticky stabilní a $(3, -2)$ je nestabilní (sedlo).]

Příklad 7. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned}x' &= -y^3 - 2x(x^2 + y^2), \\y' &= x - 3y(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

- (i) Je možné rozhodnout o stabilitě počátku pomocí linearizace?
- (ii) Najděte Ljapunovskou funkci V .
- (iii) Rozhodněte o (asymptotické) stabilitě počátku.

[Ne, $V = x^2 + \frac{1}{2}y^4$, je asymptoticky stabilní.]

Příklad 8. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned}x' &= y^3(1 + xy^3), \\y' &= -x^5(2 + xy).\end{aligned}$$

- (i) Je možné rozhodnout o stabilitě počátku pomocí linearizace?
- (ii) Najděte Ljapunovskou funkci V .
- (iii) Určete na jaké množině je V Ljapunovskou funkcí a rozhodněte, co říká o (asymptotické) stabilitě.

[Ne, $V = x^6 + \frac{3}{4}y^4$ na $\mathbb{R} \times (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, je stabilní.]

Příklad 9. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned}x' &= (1 - x)y - x^2 \sin x, \\y' &= -(1 - x)x - y^2 \sin y.\end{aligned}$$

- (i) Je možné rozhodnout o stabilitě počátku pomocí linearizace?
- (ii) Najděte Ljapunovskou funkci V .
- (iii) Určete na jaké množině je V Ljapunovskou funkcí a rozhodněte, co říká o (asymptotické) stabilitě.

[Ne, $V = x^2 + y^2$ na $(-\pi, \pi)^2$, je asymptoticky stabilní.]

Příklad 10. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ uvažujte soustavu

$$\begin{aligned}x' &= 2y - 2x \sin^2 y, \\y' &= -5x + \alpha y \cos x.\end{aligned}$$

- (i) Vyšetřete (asymptotickou) stabilitu počátku pro $\alpha > 0$.
- (ii) Vyšetřete (asymptotickou) stabilitu počátku pro $\alpha < 0$.
- (iii) Pro $\alpha = 0$ najděte Ljapunovskou funkci. Co dokážete říci o (asymptotické) stabilitě počátku?

[Pro $\alpha > 0$ nestabilní, pro $\alpha < 0$ as. stabilní, $V = x^2 + \frac{4}{10}y^2$, pro $\alpha = 0$ je stabilní.]

Příklad 11. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ uvažujte soustavu

$$\begin{aligned}x' &= \alpha y(2 + 4xy), \\y' &= x - y^3 + x^2 y.\end{aligned}$$

- (i) Pro $\alpha > 0$ vyšetřete (asymptotickou) stabilitu počátku pomocí linearizace.
- (ii) Pro $\alpha = -1$ najděte Ljapunovskou funkci. Co dokážete říci o (asymptotické) stabilitě počátku?