PÍSEMKY A DOMÁCÍ ÚKOLY (STŘEDA, 10:40, M5)

1 (3.3)**.** Buď $B = ((1,2),(3,5))$ a $C = ((4,3),(6,6))$ báze vektorového prostoru $\mathbf{Z}_7^2$. Najděte matici $[\mathrm{Id}]_{CB}$ (tj. matici přechodu od báze B k bázi C).

Vyjádříme hledanou matici přechodu jako součin matice přechodu od a ke kanonické bází, které umíme vyjádřit:

$$[\mathrm{Id}_{\mathbf{Z}_7^2}]_{CB} = [\mathrm{Id}_{\mathbf{Z}_7^2}]_{K_2B} \cdot [\mathrm{Id}_{\mathbf{Z}_7^2}]_{CK_2} = [\mathrm{Id}_{\mathbf{Z}_7^2}]_{BK_2}^{-1} \cdot [\mathrm{Id}_{\mathbf{Z}_7^2}]_{CK_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Nyní standardním způsobem spočítáme hledaný součin matic:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right).$$

Tedy zjistili jsme, že $[\mathrm{Id}_{\mathbf{Z}_7^2}]_{CB} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. □

Domácí úkol k 1.písemce (prosím odevzdejte do 17.3): *Uvažujme posloupnost vektorů* $M = ((1,1,1,0,0), (1,2,2,0,0), (3,3,2,0,0), (2,1,3,1,1), (3,4,2,3,4))$ *vektorového prostoru* $\mathbf{Z}_5^5$*. Dokažte, že je* M *báze* $\mathbf{Z}_5^5$*, spočítejte souřadnice vektoru* $(4,0,1,3,3)$ *vzhledem k bázi* M *a najděte vektor* $\mathbf{v}$*, jehož souřadnice vzhledem k bázi* M *jsou* $(1,1,1,1,1)$.

2 (10.3)**.** Buď f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ s maticí $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi $B = ((1,0,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Spočítejte hodnoty $f((0,0,1),(1,1,0))$ a $f((1,1,0)(0,0,1))$ a najděte matice symetrické bilineární formy f_s a antisymetrické bilineární formy f_a vzhledem k bázi B, pro které $f = f_s + f_a$.

Využijeme-li pozorování, které říká, že $f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = [\mathbf{v}]_B[f]_B[\mathbf{w}]_B^T$ pro každé dva vektory $\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbf{Z}_5^3$, a přímočaře spočítáme souřadnice $[(0,0,1)]_B = (1,0,4)$ a $[(1,1,0)]_B = (0,1,0)$, vidíme, že

$$f((0,0,1),(1,1,0)) = (1,0,4) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,0,4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2,$$

$$f((1,1,0),(0,0,1)) = (0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = (2,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 1,$$

Označíme $\mathbf{A}_s$ matici f_s a $\mathbf{A}_a$ matici f_a vzhledem k bázi B. Uvědomíme-li si že hledané matice $\mathbf{A}_s$ a $\mathbf{A}_a$ jsou matice rozkladu $\mathbf{A}$ na symetrickou a antisymetrickou část, stačí nám tento rozklad spočítat:

$$\mathbf{A}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T) = 2^{-1}\cdot(\begin{pmatrix}3&0&2\\2&1&1\\1&3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2&1\\0&1&3\\2&1&0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3&1&4\\1&1&2\\4&2&0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_a = \mathbf{A}-\mathbf{A}_s = \begin{pmatrix}3&0&2\\2&1&1\\1&3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1&4\\1&1&2\\4&2&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&4&3\\1&0&4\\2&1&0\end{pmatrix}.$$

□

Domácí úkol k 2.písemce (prosím odevzdat do 24.3, ti, co za 2.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Buď f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_7^3$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ s maticí $[f]_B = \begin{pmatrix}3&5&1\\2&1&1\\5&6&5\end{pmatrix}$ vzhledem k bázi $B = ((4,0,1),(2,2,0),(1,3,0))$.*

a) Spočítejte hodnoty $f((0,0,1),(1,1,0))$ a $f((1,1,0)(0,0,1))$.

b) Najděte matice symetrické bilineární formy f_s a antisymetrické bilineární formy f_a vzhledem k bázi $C = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$, pro které $f = f_s + f_a$.

3 (17.3)**.** Mějme g_2 kvadratickou forma na $\mathbf{Z}_5^2$ danou předpisem $g_2(x_1,x_2) = x_1x_2$. Spočítejte vzhledem ke kanonické bázi matici symetrické bilineární formy g, která vytváří g_2 (tj. $g_2(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v},\mathbf{v})$), a najděte nějakou polární bázi P formy g a matici g vzhledem k P.

Protože $g((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 3x_1y_2 + 3x_2y_1$, máme matici $[g]_{K_2} = \begin{pmatrix}0&3\\3&0\end{pmatrix}$. Postupujeme-li metodou I, nejprve zvolíme vektor $\mathbf{p}_1$, pro nějž $g_2(\mathbf{p}_1) \neq 0$. Zjevně sice $g_2(\mathbf{e}_1) = g_2(\mathbf{e}_2) = 0$, ale $g_2(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2) = 1$. Položíme tedy $\mathbf{p}_1 = (1,1)$ a poté řešíme homogenní soustavu rovnic s maticí

$$[\mathbf{p}_1]_{K_2}[g]_{K_2} = (1,1)\cdot\begin{pmatrix}0&3\\3&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&3\end{pmatrix}.$$

Vidíme, že soustavu řeší $\mathbf{p}_2 = (4,1)$ a $g_2(\mathbf{p}_2) = 4\cdot 1 = 4$, tedy jsme našli polární bázi $P = ((1,1),(4,1))$ a $[g]_P = \begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$. □

Domácí úkol k 3.písemce (prosím odevzdat do 31.3, ti, co za 2.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Buď h symetrická bilineární forma na $\mathbf{Z}_5^4$ splňující podmínky $h(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i) = 3$ pro $i = 1,\dots,4$ a $h(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = 4$ pro $i \neq j$. Najděte a) vrchol h, b) nějakou polární bázi h.*

4 (24.3)**.** Mějme f_2 kvadratickou forma na $\mathbf{R}^3$ danou předpisem $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$. Najděte nějakou polární bázi symetrické bilineární formy f vytvářející f_2, a rozhodněte, zda existuje vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$, pro který $f_2(\mathbf{v}) < 0$.

Nejprve určíme matici symetrické bilineární formy f vzhledem ke kanonické bázi $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ a postupujeme například metodou II z přednášky, tj. upravujeme posloupností symetrických elementárních úprav a řádkové úpravy zaznamenáváme.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s$$

$$\sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Protože je pravá část matice právě matice transponovaná k matici přechodu od polární báze P ke kanonické bázi, tedy $[\mathrm{Id}]_{PK_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, máme $P = ((1,0,0), (-1,1,0), (1,-2,1))$. Zároveň jsme zjistili, že $[f]_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, proto $f_2((1,-2,1)) = -4$, tedy vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$, pro který $f_2(\mathbf{v}) < 0$ existuje. □

Domácí úkol k 4.písemce (prosím odevzdat do 7.4, ti, co za 4.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Mějme f_2 kvadratickou forma na $\mathbf{R}^4$ danou předpisem $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_2x_4 - x_3^2 + 2x_4^2$. Označme f symetrickou bilineární formu f vytvářející f_2.*

a) Spočítejte signaturu f,

b) najděte nějakou polární bázi f.

5 (31.3)**.** Spočítejte signaturu symetrické bilineární formy g na $\mathbf{R}^4$ s maticí $[g]_{K_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_4 a určete vrchol g.

Signaturu spočítáme například metodou II, tedy matici $[g]_{K_4}$ upravíme posloupností symetrických úprav na diagonální matici. Nejprve odečteme čtvrý řádek a sloupec od druhého, poté odečteme od čtvrého řádku a sloupce první a nakonec čtvrý řádek a sloupec přičteme ke třetímu:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\sim_s\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\sim_s\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\sim_s\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Vidíme, že na diagonále nalezené diagonální matice jsou tři hodnoty kladné a jedna záporná, proto má g signaturu $(0,3,1)$. Protože se na diagonále této matice nevyskytuje nula, je vrchol triviální, tedy $V(g)=\{\mathbf{0}\}$. □

Domácí úkol k 5.písemce (prosím odevzdat do 14.4, ti, co za 5.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Mějme* $M=((1,-1,1,1,1),(1,1,1,-1,1),(1,1,-1,1,1),(-1,1,1,1,1),(1,1,1,1,-1))$ *ortonormální bázi skalárního součinu* g *na reálném vektorovém prostoru* $\mathbf{R}^5$.

a) Spočítejte $g((1,0,0,0,0),(0,0,1,0,0))$,

b) najděte matici g *zhledem ke kanonické bázi.*

6 (7.4)**.** Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$. Ověřte, že je $B=(\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1,0),\frac{1}{\sqrt3}(1,0,-1,1),\frac{1}{\sqrt3}(1,-1,0,-1),\frac{1}{\sqrt3}(0,1,-1,-1)$, ortonormální báze $\mathbf{R}^4$ vzhledem k $\cdot$ a spočítejte souřadnice $[(1,1,-1,2)]_B$.

Označme si vektory posloupnosti $B=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4)$. Nyní přímočarým výpočtem zjistíme, že $\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{b}_j=\delta_{ij}$, čímž jsme ověřili, že B je ortonormální posloupnost. Tudíž je B lineárně nezávislá posloupnost délky 4 ve vektorovém prostoru dimenze 4, a proto jde o ortonormální bázi $\mathbf{R}^4$.

Protože pro každý vektor $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^4$ a ortonormální bázi B platí $[\mathbf{v}]_B=(\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{v},\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{v},\mathbf{b}_3\cdot\mathbf{v},\mathbf{b}_4\cdot\mathbf{v})$, spočítáme

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1,0)\cdot(1,1,-1,2)&=\frac{1}{\sqrt3}(1+1-1)=\frac{1}{\sqrt3},\\ \frac{1}{\sqrt3}(1,0,-1,1)\cdot(1,1,-1,2)&=\frac{1}{\sqrt3}(1+1+2)=\frac{4}{\sqrt3},\\ \frac{1}{\sqrt3}(1,-1,0,-1)\cdot(1,1,-1,2)&=\frac{1}{\sqrt3}(1-1-2)=-\frac{2}{\sqrt3},\\ \frac{1}{\sqrt3}(0,1,-1,-1)\cdot(1,1,-1,2)&=\frac{1}{\sqrt3}(1+1-2)=0.\end{aligned}$$

tedy $[(1,1,-1,2)]_B=\frac{1}{\sqrt3}(1,4,-2,0)$. □

Domácí úkol k 6.písemce (prosím odevzdat do 21.4, ti, co za 6.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Uvažujme standardní skalární součin* $\cdot$ *na reálném vektorovém prostoru* $\mathbf{R}^4$ *a mějme vektory* $\mathbf{u}_1=\frac{1}{\sqrt{11}}(1,0,1,3)$ $\mathbf{u}_2=\frac{1}{\sqrt6}(1,2,-1,0)$, *a* $\mathbf{u}_3=\frac15(2,1,4,-2)$.

a) Dokažte, že je posloupnost $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$ *ortonormální a dopňte ji na ortonormální bázi* M.

b) Spočítejte souřadnice $[(1,3,1,2)]_M$ *a* $[(0,-1,1,1)]_M$.

7 (14.4)**.** Buď $\cdot$ standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^5$. Najděte nějakou ortonormální bázi podprostoru $V = \langle(1,0,1,1,-1),\ (2,3,1,0,1),\ (1,2,-3,1,1)\rangle$ a rozhodněte, zda $(-1,1,0,0,1) \in V^{\perp}$.

Označme $\mathbf{u}_1 = (1,0,1,1,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,3,1,0,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,2,-3,1,1)$, Vytvoříme pomoc Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace ortonormální posloupnost $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, pro kterou platí, že $\langle \mathbf{v}_1\rangle = \langle \mathbf{u}_1\rangle$, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle$ a $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\rangle$.

1. $\mathbf{v}_1 = \frac{(1,0,1,1,-1)}{\|(1,0,1,1,-1)\|} = \frac{1}{2}(1,0,1,1,-1)$.
2. Nejprve spočítáme $b_1 = \mathbf{v}_1 \cdot (2,3,1,0,1) = \frac{2}{2} = 1$. Získáme ortogonalizovaný vektor $\mathbf{v}_2' = \mathbf{u}_2 - b_1\,\mathbf{v}_1 = (2,3,1,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,1,1,-1) = \frac{1}{2}(3,6,1,-1,3)$, proto $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2\sqrt{14}}(3,6,1,-1,3)$.
3. Opět spočítáme skalární součiny $c_1 = \mathbf{v}_1 \cdot (1,2,-3,1,1) = -\frac{2}{2} = -1$ a $c_2 = \mathbf{v}_2 \cdot (1,2,-3,1,1) = \frac{14}{2\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$. Potom $\mathbf{v}_3' = \mathbf{u}_3 - c_1\,\mathbf{v}_1 - c_2\,\mathbf{v}_2 = (1,2,-3,1,1) + \frac{1}{2}(1,0,1,1,-1) - \frac{1}{4}(3,6,1,-1,3) = \frac{1}{4}(3,2,-11,7,-1)$ Tedy $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{184}}(3,2,-11,7,-1)$.

Tedy $(\frac{1}{2}(1,0,1,1,-1), \frac{1}{2\sqrt{14}}(3,6,1,-1,3), \frac{1}{2\sqrt{46}}(3,2,-11,7,-1))$ je hledaná ortonormální báze.

Konečně, protože stačí spočítat skalární součin $\mathbf{u}_1 \cdot (-1,1,0,0,1) = -2 \neq 0$ vidíme, že $(-1,1,0,0,1) \notin V^{\perp}$. □

Domácí úkol k 7.písemce (prosím odevzdat do 28.4, ti, co za 7.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Uvažujme standardní skalární součin* $\cdot$ *na reálném vektorovém prostoru* $\mathbf{R}^4$ *a vektory* $\mathbf{u}_1 = (1,-1,-2,1)$*,* $\mathbf{u}_2 = (1,2,-5,-1)$*, a* $\mathbf{u}_3 = (1,0,-3,2)$*. Najděte ortonormální bázi* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ *prostoru* $\mathbf{R}^4$*, aby*

(a) $\langle \mathbf{v}_1\rangle = \langle \mathbf{u}_1\rangle$, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle$ *a* $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\rangle$,

(b) $\langle \mathbf{v}_1\rangle = \langle \mathbf{u}_3\rangle$, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\rangle$ *a* $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\rangle$.

8 (21.4)**.** Uvažujme standardní skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ a $U = \langle(2,1,2,-1),\ (1,0,1,1)\rangle$. Najděte vektor $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{u}^{\perp} \in U^{\perp}$, aby $(-1,2,2,5) = \mathbf{u} + \mathbf{u}^{\perp}$,

Hledáme takovou lineární kombinaci vektorů $x_1 \cdot (2,1,2,-1) + x_2 \cdot (1,0,1,1)$, aby byl vektor $(-2,3,1,1) - x_1 \cdot (2,1,2,-1) - x_2 \cdot (1,0,1,1)$ kolmý na prostor U, tedy na oba generující vektory $(2,1,2,-1)$, $(1,0,1,1)$. Spočítáme-li skalární součiny

$$(2,1,2,-1)\cdot(2,1,2,-1) = 10, \quad (2,1,2,-1)\cdot(1,0,1,1) = 3,$$

$$(1,0,1,1)\cdot(1,0,1,1) = 3, \quad (2,1,2,-1)\cdot(-1,2,2,5) = -1$$

a $(1,0,1,1)\cdot(-1,2,2,5) = 6$, dostaneme z této úvahu Gramovu matici soustavy, kterou upravíme:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Odtud již zjistíme, že $x_1 = -1$ a $x_2 = 3$, proto je ortogonální projekce vektoru $(-1,2,2,5)$ na podprostor U vektor $\mathbf{u} = -(2,1,2,-1) + 3\cdot(1,0,1,1) = (1,-1,1,4)$ a $\mathbf{u}^{\perp} = (-1,2,2,5) - (1,-1,1,4) = (-2,3,1,1)$. □

Domácí úkol k 8.písemce (prosím odevzdat do 5.5: *Spočítejte ortogonální projekci vektoru $(1,1,i,-i)$ do podprostoru $U = \langle (1-i,1,0,1+i),\ (1,-1,i,0)\rangle$ komplexního vektorovém prostoru $\mathbf{C}^4$ se standardním skalárním součinem.*

9 (28.4)**.** Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ nad tělesem reálných čísel.

Nejprve spočítáme charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$, tedy $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) + 3(\lambda+2) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda = -\lambda(\lambda+2)(\lambda-4)$. Dosazením najdeme vlastní čísla 0, -2, 4. Dále hledáme vlastní vektory, tj. řešíme homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A} - 0\mathbf{E}$, $\mathbf{A} + 2\mathbf{E}$ a $\mathbf{A} - 4\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A} - 0\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy $\langle (-3,2,1), \rangle \setminus \{(0,0,0)\}$ jsou všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 0,

$$\mathbf{A} + 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy $\langle (-1,0,1), \rangle \setminus \{(0,0,0)\}$ jsou všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 3,

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy $\langle (1,2,1), \rangle \setminus \{(0,0,0)\}$ jsou všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 4. □

Domácí úkol k 9.písemce (prosím odevzdat do 19.5, ti, co za 9.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Buď* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *nad tělesem* $\mathbf{R}$.

a) Najděte všechna vlastní čísla $\mathbf{A}$*,*

b) najděte všechny vlastní vektory $\mathbf{A}$*.*

10 (5.5)**.** Buď $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ matice nad tělesem $\mathbf{Z}_7$. Najděte regulární matici $\mathbf{P}$ nad $\mathbf{Z}_7$, pro niž je $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ diagonální a spočítejte $\mathbf{A}^6$.

Nejprve spočítáme charakteristický polynom $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 4$ a dosazením najdeme vlastní čísla 1 a 4. Nyní vyřešíme-li soustavy s maticemi $\mathbf{A} - 1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{A} - 4\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. najdeme bázi $B = ((1,6),(2,1))$ prostoru $\mathbf{Z}_7^2$ složenou z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$. Položíme-li nyní $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{BK_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, dostáváme $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Konečně

$$\mathbf{A}^6 = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^6 \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 1^6 & 0 \\ 0 & 4^6 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PEP}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Domácí úkol k 10.písemce (prosím odevzdat do 19.5, ti, co za 10.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Nechť* ψ *je endomorfismus na vektorovém prostoru* $\mathbf{R}^4$ *nad tělesem* $\mathbf{R}$ *daný předpisem* $\psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_4, x_1 + x_2 + x_3)$. *Existuje-li, najděte*

a) bázi B, *vůči níž ma endomorfismus* ψ *diagonální matici a určete* $[\psi]_B$,

b) ortonormální bázi B, *vůči níž ma endomorfismus* ψ *diagonální matici a určete* $[\psi]_B$.