Příklady 1.

Domácí úlohy (odevzdejte, prosím, do 26.2. 16:00):

1. (8 bodů) Pro $n > 1$ celé najděte všechny podalgebry algebry $\mathbf{A}_n = (\{0, \dots, n-1\}, *)$, kde $a * b = a + b \bmod n$.

2. (7 bodů) Buď $\mathbf{A} = (A, *)$ algebra v jazyce $\{*\}$, kde $*$ je binární operace. Ověřte, že množina

$$\{a \in A : (x * a) * y = x * (a * y) \text{ pro všechna } x, y \in A\}$$

je buď prázdná, nebo tvoří podalgebru algebry $\mathbf{A}$. Uveďte příklad algebry, ve které je tato množina prázdná.

Všechna svá tvrzení zdůvodňujte, hodnotí se i jasnost a srozumitelnost argumentace (například rozvleklost je nežádoucí)!

Příklady vhodné na cvičení:

3. Rozhodněte, zda regulární matice tvoří podalgebru algebry a) $(M_n(\mathbb{R}), +)$, b) $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$.

4. Pro která $u \in \mathbb{R}$ tvoří množina $A_u = \{z \in \mathbb{C} : |z| = u\}$ podalgebru algebry a) $(\mathbb{C}, +)$, b) $(\mathbb{C}, \cdot)$ c) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, :)$?

5. Najděte všechny podalgebry algebry $(\mathbb{Z}, f)$ typu (1), kde a) $f(k) = k + 1$, b) $f(k) = k - 1$, c) $f(k) = 0$.

6. Spočtěte prvky algeber a) $\langle 2 \rangle_{(\mathbb{N},+)}$, b) $\langle 2 \rangle_{(\mathbb{Z},\cdot)}$, c) $\langle 2 \rangle_{(\mathbb{Z},-)}$, d) $\langle 2 \rangle_{(\mathbb{Q}\setminus\{0\},:)}$.

Další doporučené příklady na domácí počítání:

7. Buď $\mathbf{T}_3 = (T_3, \circ)$ algebra všech zobrazení na množině $\{1, 2, 3\}$ s operací skládání zobrazení. Ověřte, že $\mathbf{T}_3 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, a dokažte, že tato algebra není generována žádnou dvouprvkovou množinou.

8. Vypište všechny podalgebry algebry $\mathbf{A} = (\{1, 2, 3, a, b, c\}, f)$ s unární operací f, kde $f(a) = f(1) = 2$, $f(b) = f(2) = 3$, $f(c) = f(3) = 1$. Nakreslete uspořádanou množinu podalgeber, s uspořádáním inkluze nosných množin.