

## Příklady 8.

**Domácí úlohy (odevzdejte, prosím, do 16.4. 16:00):**

1. (9 bodů) Najděte všechny ideály okruhu  $(\mathbb{Z}_{10}, +, -, \cdot, 0, 1) \times (\mathbb{Z}_{10}, +, -, \cdot, 0, 1)$ .
2. (6 bodů) Najděte nějaký primitivní prvek tělesa  $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$ .

*Všetchna svá tvrzení zdůvodňujte, hodnotí se i jasnost a srozumitelnost argumentace!*

**Příklady vhodné na cvičení:**

3. Najděte všechny ideály okruhů  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_5$ ,  $\mathbb{Z}_8$ ,  $\mathbb{Z}_{12}$ , obecně  $\mathbb{Z}_n$ .
4. Spočítejte prvky nejmenšího ideálu okruhu  $\mathbb{Z}$  obsahujícího a) 28, 63, b) 15, 18, 40.
5. Spočítejte prvky nejmenšího ideálu okruhu  $\mathbb{Q}$  obsahujícího  $\frac{3}{4}$ .
6. Popište operace a hledání inverzu a najděte primitivní prvky těles  
(a)  $\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ , (b)  $\mathbb{F}_8 = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ .
7. Najděte generátor hlavního ideálu v oboru  $(\mathbb{Q}[x], +, -, \cdot, 0, 1)$ 
  - a)  $(x^3 - 1)\mathbb{Q}[x] \cap (x^2 + 3)\mathbb{Q}[x]$ ,
  - b)  $(x^3 - 1)\mathbb{Q}[x] + (x^2 + 3)\mathbb{Q}[x]$ ,
  - c)  $(x^3 - 1)\mathbb{Q}[x] \cap (x^2 - 1)\mathbb{Q}[x]$ ,
  - d)  $(x^3 - 1)\mathbb{Q}[x] + (x^2 - 1)\mathbb{Q}[x]$ .

**Další doporučené příklady na domácí počítání:**

8. Spočítejte prvky nejmenšího ideálu okruhu  $\mathbb{Z}[x]$  obsahujícího a)  $x^2, x^3$ , b)  $x^2 + 2, x$ , c)  $2, x^2$ .
9. Rozhodněte, zda množina  $\{\sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x] : a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0\}$  tvoří ideál okruhu  $\mathbb{Z}[x]$ . Je to hlavní ideál? Pokud ano, najděte generátor.
10. Rozhodněte, zda množina  $\{x \cdot f + 3g : f, g \in \mathbb{Z}[x]\}$  tvoří ideál okruhu a)  $\mathbb{Z}[x]$ , b)  $\mathbb{Q}[x]$ . Je to hlavní ideál? Pokud ano, najděte generátor.
11. Buď  $\mathbf{R}$  komutativní okruh s jednotkou a  $I$  jeho ideál. Dokažte, že  $\mathbf{R}/I$  je obor integrity právě tehdy, když  $I$  je prvoideál. Ideál nazýváme prvoideálem, pokud  $ab \in I$  implikuje  $a \in I$  nebo  $b \in I$ .