

## Příklady 9.

### Domácí úlohy (odevzdejte, prosím, do 23.4. 16:00):

Ve všech úlohách uvažujeme podtělesa a prvky tělesa komplexních čísel.

- (9 bodů) Spočítejte minimální polynom prvku  $\sqrt[4]{2}$   
a) nad tělesem  $\mathbb{Q}$  b) nad tělesem  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ .
- (6 bodů) Spočítejte  $[\mathbb{Q}(e^{\frac{\pi i}{2}}) : \mathbb{Q}]$ .

*Všechna svá tvrzení zdůvodňujte, hodnotí se i jasnost a srozumitelnost argumentace!*

### Příklady vhodné na cvičení:

- Spočítejte dimenzi a najděte nějakou bázi racionálních vektorových prostorů:  
(a)  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ , (b)  $\mathbb{Q}(\frac{17-\sqrt{5}}{19})$ , (c)  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ , (d)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ .
- Najděte nad tělesem  $\mathbb{Q}$  minimální polynom prvků  
(a)  $\sqrt{5}$ , (b)  $\sqrt[3]{2}$ , (c)  $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ , (d)  $\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ , (e)  $1 - \sqrt[3]{2}$ .
- (6 bodů) Spočítejte  
(a)  $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$ , (b)  $[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}}) : \mathbb{Q}]$ , (c)  $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$ .
- Uveďte příklad nekonečného tělesa (případně tělesa libovolné nekonečné mohutnosti) kladné charakteristiky.

### Další doporučené příklady na domácí počítání:

- Spočítejte dimenzi a najděte nějakou bázi racionálního vektorového prostoru  $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/6})$ .
- Popište všechny polynomy  $p \in \mathbb{Q}[x]$  splňující  $p(e^{\frac{2\pi i}{6}}) = 0$ .
- Najděte nad tělesem  $\mathbb{Q}$  minimální polynom prvků (a)  $i + \sqrt{5}$ , (b)  $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ , (c)  $e^{\frac{2\pi i}{24}}$ .