PÍSEMKY Z LINEÁRNÍ ALGEBRY

Úloha 1 (21.10)**.** (cvičení od 9:00): Najděte parametrický popis všech racionálních, reálných a komplexních řešení soustavy rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(cvičení od 10:40): Najděte parametrický popis všech racionálních, reálných a komplexních řešení soustavy rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Řešení. V obou případech si matici soustavy převedeme pomocí posloupnosti ekvivalentních úprav do odstupňovaného tvaru.

(cvičení od 9:00):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Nejprve jsme přehodili první dva řádky a prvním upravili poslední, poté jsme upravili první řádek pomocí druhého (tato úprava je spíše kosmetická a obešli bychom se bez ní) a pomocí nového prvního upravili druhý a nakonec jsme odečetli poslední řádek. Vidíme, že pivoty se nachází v prvních dvou sloupcích, proto volná je poslední proměnná. Položíme tedy $x_3 = s$, kde postupně $s \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, dopočítáme zpětnou substitucí první dvě neznámé x_2 a x_1:

$x_2 - s = -4 \Rightarrow x_2 = -4 + s$

$x_1 + s = 3 \Rightarrow x_1 = 3 - s$.

To znamená, že množina řešení je právě tvaru

$$\{(3, -4, 0) + s \cdot (-1, 1, 1) |\ s \in T\}$$

postupně pro $T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(cvičení od 10:40):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Nejprve jsme upravili první řádek pomocí druhého (abychom mohli pracovat s pivotem 1) a pomocí nového prvního upravili druhý a třetí. Vidíme, že pivoty se nachází v prvních dvou sloupcích, proto volná je poslední proměnná. Položíme tedy $x_3 = s$, kde postupně $s \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ a dopočítáme zpětnou substitucí první dvě neznámé x_2 a x_1:

$-x_2 - 2s = 2 \Rightarrow x_2 = -2 - 2s$

$x_1 + x_2 + s = 0 \Rightarrow x_1 = -(-2-2s) - s = 2 + s$.
Množina řešení je právě tvaru

$$\{(2,-2,0) + s\cdot(1,-2,1)|\ s \in T\},$$

kde uvažujeme $T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. □

Úloha 2 (11.11)**.** (cvičení od 9:00): Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ parametrický popis množiny všech řešení soustavy lineárních rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

(cvičení od 10:40): Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ parametrický popis množiny všech řešení soustavy lineárních rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Řešení.
(cvičení od 9:00):
Nejprve upravíme matici posloupností elementárních úprav na odstupňovanou:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Stačilo tedy přičíst první řádek k druhému, pětinásobek prvního řádku k třetímu a poté odečíst druhý řádek od třetího. Získali jsme jednu bazickou a tři volné proměnné a nyní najdeme všechna řešení zpětnou substitucí pro volbu $x_2 = s$ a $x_4 = t$. Nyní stačí zpětnou substitucí dopočítat množinu všech řešení:

$$\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{Z}_7\}.$$

□

(cvičení od 10:40):
Upravíme matici posloupností elementárních úprav na odstupňovanou:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nejprve jsme přičetli čtyřnásobek prvního řádku k druhému, poté přičetli dvojnásobek prvního řádku k třetímu a nakonec jsme přičetli druhý řádek ke třetímu.. Máme tedy dvě bazické a dvě volné proměnné a nyní najdeme všechna řešení zpětnou substitucí pro volbu $x_2 = s$ a $x_4 = t$ a dopočítáme množinu všech řešení:

$$\{\begin{pmatrix}5\\0\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}5\\1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{Z}_7\}.$$

□

Úloha 3 (18.11)**.** (cvičení od 9:00): Definujme zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ předpisem $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix}3&1&2\\4&2&2\end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}$. Najděte všechny vektory, pro které

a) $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, b) $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, c) $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.

(cvičení od 10:40): Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ všechny matice $\mathbf{X}$ splňující maticovou rovnici $\begin{pmatrix}3&5&4\\5&2&1\end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix}2&5\\1&4\end{pmatrix}$.

Řešení.

(cvičení od 9:00):

Položme $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3&1&2\\4&1&1\end{pmatrix}$. Protože vztah $f(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$ představuje soustavu lineárních rovnic, budeme pracovat s maticovým zápisem soustav $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$ postupně pro vektory pravých stran $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. Pro všechny tři soustavy stačí matici levých stran $\mathbf{A}$ upravit na odstupňovaný tvar jen jednou. Zároveň s ní upravíme stejnými řádkovými úpravami oba nenulové vektory pravých stran:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}3&1&2&1&2\\4&2&2&1&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&4&2&4\\4&2&2&1&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&4&2&4\\0&4&1&3&1\end{array}\right).$$

Nyní nejprve zpětnou substitucí zjistíme, že množina všech řešení homogenní soustavy a) je tvaru $\{t\cdot(4,1,1)^T \mid t \in \mathbb{Z}_5\}$. Protože už víme, že každé řešení nehomogenní soustavy je tvaru jedno řešení + řešení homogenní soustavy, zbývá najít zpětnou substitucí jedno řešení pro obě pravé strany a volbu třetí složky 0. Snadno spočteme, že v případě b) je řešením vektor $(3,2,0)^T$ a v případě c) vektor $(1,4,0)^T$, proto jsou množiny všech řešení tvaru

$$\text{a) } \{t\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5\},\ \text{b) } \{\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5\},\ \text{c) } \{\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5\}.$$

(cvičení od 10:40):

Nejprve poznamenejme, že hledaná matice $\mathbf{X}$ musí být typu 3×2. Položíme-li $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3&5&4\\5&2&1\end{pmatrix}$, dostáváme rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix}2&5\\1&4\end{pmatrix}$. Tu lze vyjádřit jako dvě soustavy rovnic s vektory neznámých $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_7^3$ obsažených ve sloupcích matice $\mathbf{X}$, tedy $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Řešíme proto soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ a $\mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$, které můžeme zapsat do jedné matice s oběma vektory pravých stran vpravo a levé strany budeme poté upravovat posloupností elementárních úprav na odstupňovanou matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 6 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Nyní nejprve zpětnou substitucí dopočítáme množinu všech řešení homogenní soustavy s maticí levých stran $\mathbf{A}$, jíž je $\{t \cdot (2,5,1)^T \mid t \in \mathbb{Z}_7\}$. Protože je množina všech řešení nehomogenní soustavy součtem libovolného vybraného řešení a všech řešení homogenní soustavy, zbývá najít zpětnou substitucí jedno řešení pro obě pravé strany a volbu třetí složky 0. Snadno spočteme, že v případě vektoru neznámých $\mathbf{x}$ je partikulárním řešením vektor $(3,0,0)^T$ a v případě vektoru neznámých $\mathbf{y}$ je partikulárním řešením $(2,4,0)^T$. To znamená, že po transponování vidíme, že rovnici splňují právě matice $\mathbf{X}$ z množiny $\{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & 2s \\ 5t & 5s \\ t & s \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{Z}_7\}$ □

Úloha 4 (25.11)**.** (cvičení od 9:00): Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a) matici $\mathbf{A}^{-1}$, b) rozklad $\mathbf{A}$ na součin elementárních matic c) LU rozklad matice $\mathbf{A}$.

(cvičení od 10:40): Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ najděte nad tělesem $\mathbb{Q}$ a) matici $\mathbf{A}^{-1}$, b) rozklad $\mathbf{A}$ na součin elementárních matic c) LU rozklad matice $\mathbf{A}$.

Řešení.
(cvičení od 9:00):

Nejprve budeme pomocí rozšířené matice $(\mathbf{A}|\mathbf{I}_2)$ řešit dvě soustavy rovnic se stejnou maticí levých stran $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{A}\,\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Posloupností Gaussovy eliminace převedeme $(\mathbf{A}|\mathbf{I}_2)$ na matici, v jejíž pravé části je jednotková matice:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Zjistili jsme, že $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Z první úpravy okamžitě vidíme LU rozklad:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

A seřazením matic inverzních k těm, pomocí nichž jsme upravovali dostaneme $\mathbf{A}$ jako součin elementárních matic:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(cvičení od 10:40):

Budeme hledat inverzní matici k matici $\mathbf{A}$ Gaussovou eliminací rozšířené matice $(\mathbf{A}|\mathbf{I}_2)$, kterou upravíme tak, aby v její pravé části byla jednotková matice.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -2 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\end{array}\right)$$

Spočítali jsme, že $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

Odpovědi na zbývající dvě otázky najdeme v právě provedeném algoritmu. Nejprve si všimněme, že po první úpravy odečteme z rozšířené matice LU rozklad:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

Inverzní úpravy k těm provedeným nám dají matici $\mathbf{A}$ jako součin elementárních matic: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. □

Úloha 5 (2.12)**.** (cvičení od 9:00): Nechť $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}6\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}5\\5\\4\end{pmatrix}$ jsou vektory aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$. Rozhodněte zda

a) množina $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ generuje $\mathbb{Z}_7^3$,

b) je množina $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{0}\}$ podprostor prostoru $\mathbb{Z}_7^3$,

c) je množina $\{\mathbf{v}_1 + t\,\mathbf{v}_2 \mid t \in \mathbb{Z}_7\}$ podprostor prostoru $\mathbb{Z}_7^3$.

(cvičení od 10:40): Uvažujme vektory $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$

Rozhodněte zda

a) $\mathbf{v}_1 \in \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$,

b) je množina $\{\mathbf{v}_1 + t\,\mathbf{v}_2 \mid t \in \mathbb{Z}_5\}$ podprostor prostoru $\mathbb{Z}_5^3$,

c) je množina $\{\mathbf{v}_1 + t\,\mathbf{v}_2 + s\,\mathbf{v}_3 \mid t, s \in \mathbb{Z}_5\}$ podprostor prostoru $\mathbb{Z}_5^3$.

Řešení.

(cvičení od 9:00):

a) Ptáme se, zda lze každý vektor lineárního prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ dostat jako lineární kombinaci vektorů množiny $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, tj. zda pro každý vektor pravých stran $\mathbf{b}$ existuje řešení $\mathbf{x}$ soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}4 & 6 & 5\\ 5 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$. To je ovšem ekvivalentní otázce, zda je tato matice regulární. Budeme tedy upravovat posloupností elementárních úprav:

$$\begin{pmatrix}4 & 6 & 5\\ 5 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}4 & 6 & 5\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 5 & 5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}4 & 6 & 5\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Spočítali jsme, že je matice $\mathbf{A}$ singulární, proto množina $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ negeneruje celý prostor $\mathbb{Z}_7^3$

b) Protože množina $2\mathbf{v}_1 \notin \{\mathbf{v}_1, \mathbf{0}\}$ nemůže jít o podprostor.

c) Vidíme, že vektor $-\mathbf{v}_1$ není násobkem vektoru $\mathbf{v}_2$, proto $-\mathbf{v}_1 \notin \langle \mathbf{v}_2 \rangle$. Množina $\{\mathbf{v}_1 + t\,\mathbf{v}_2 \mid t \in \mathbb{Z}_7\}$ proto neobsahuje nulový vektor a tudíž nemůže jít o podprostor.

(cvičení od 10:40):

a) Ptáme se, zda je vektor $\mathbf{v}_1$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3$, tedy zda existují skaláry $x, y \in \mathbb{Z}_5$, pro $\mathbf{v}_1 = x\,\mathbf{v}_2 + y\,\mathbf{v}_3$. To znamená, že musíme zjistit, zda existuje řešení soustavy rovnic s maticí $(\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_3 \mid \mathbf{v}_1)$. To zjistíme obvyklým způsobem pomocí posloupnosti elementárních úprav:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Zjistili jsme, že je daná soustava řešitelná, proto platí, že $\mathbf{v}_1 \in \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$.

b) Snadno nahlédneme, že vektor $-\mathbf{v}_1$ není násobkem vektoru $\mathbf{v}_2$, tedy $-\mathbf{v}_1 \notin \langle \mathbf{v}_2 \rangle$. To znamená, že množina $\{\mathbf{v}_1 + t\,\mathbf{v}_2 \mid t \in \mathbb{Z}_7\}$ neobsahuje nulový vektor a nejde tudíž o podprostor.

c) V části a) jsme zjistili, že $\mathbf{v}_1 \in \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$, proto

$$\{\mathbf{v}_1 + t\,\mathbf{v}_2 + s\,\mathbf{v}_3 \mid t, s \in \mathbb{Z}_5\} \subseteq \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle.$$

Navíc každá lineární kombinace $x\,\mathbf{v}_2 + y\,\mathbf{v}_3$ leží v $\{\mathbf{v}_1 + t\,\mathbf{v}_2 + s\,\mathbf{v}_3 \mid t, s \in \mathbb{Z}_5\}$. Zjistili jsme, že $\{\mathbf{v}_1 + t\,\mathbf{v}_2 + s\,\mathbf{v}_3 \mid t, s \in \mathbb{Z}_5\} = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$, což je podprostor lineárního prostoru $\mathbb{Z}_5^3$. □

Úloha 6 (9.12)**.** (cvičení od 9:00): Rozhodněte, zda je lineárně závislá či nezávislá posloupnost vektorů $X = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

(cvičení od 10:40): Rozhodněte, zda je lineárně závislá či nezávislá posloupnost vektorů $X = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

Řešení.

(cvičení od 9:00):

Potřebujeme zjistit, zda jedinou lineární kombinací vektorů posloupnosti X, jejímž výsledkem je nula, je kombinace triviální. Ptáme se tedy na existenci netriviálního řešení homogenní soustavy rovnic s maticí, která vznikne sepsáním těchto vektorů do sloupců. Sestavíme matici a tu řádkově upravujeme

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zjistili jsme, že je 3.sloupec matice volný, tudíž existuje netriviální řešení soustavy a posloupnost X je lineárně závislá.

(cvičení od 10:40):
Máme zjistit, zda existuje netriviální lineární kombinace vektorů posloupnosti X, jejímž výsledkem bude nula. Ptáme se tedy na existenci netriviálního řešení homogenní soustavy rovnic s maticí, která vznikne sepsáním těchto vektorů do sloupců. Nyní stačí řádkově upravovat vzniklou matici

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že odstupňovaná matice soustavy nemá žádný volný sloupec, proto neexistuje tudíž žádné netriviální řešení soustavy a posloupnost X je lineárně nezávislá. $\square$

Úloha 7 (16.12)**.** (cvičení od 9:00): Určete pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ dimenze podprostorů Im$\mathbf{A}$, Im$\mathbf{A}^T$, Ker$\mathbf{A}$, Ker$\mathbf{A}^T$. Najděte dále nějakou bázi Ker$\mathbf{A}$ a doplňte ji na bázi $\mathbf{Z}_5^5$.

(cvičení od 10:40): Určete pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ dimenze prostorů Im$\mathbf{A}$, Im$\mathbf{A}^T$, Ker$\mathbf{A}$, Ker$\mathbf{A}^T$. Najděte dále nějakou bázi Ker$\mathbf{A}$ a doplňte ji na bázi $\mathbf{Z}_7^4$.

Řešení.
(cvičení od 9:00):
Nejprve upravíme matici posloupností elementárních úprav:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud díky tvrzení z přednášky a definice hodnosti vidíme, že $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = 2$, a proto $\dim \mathrm{Im}\mathbf{A} = \dim \mathrm{Im}\mathbf{A}^T = \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = 2$. Díky větě z přednášky máme Ker$\mathbf{A}$ $= 5 - \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = 5 - 2 = 3$ a podobně Ker$\mathbf{A}^T = 3 - \mathrm{rank}(\mathbf{A}^T) = 3 - 2 = 1$. Z nalezené matice snadno dopočítáme bázi řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A}$: $M =$

$((4,0,1,0,0)^T$, $(4,3,0,1,0)^T$, $(0,1,0,0,1)^T)$. Nyní vidíme, že vektory $(1,0,0,0,0)^T$, $(0,1,0,0,0)^T$ doplňují M na bázi $\mathbf{Z}_5^5$, protože rank $\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\4&0&1&0&0\\4&3&0&1&0\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}=5$.

(cvičení od 10:40):
Nejprve upravíme matici posloupností elementárních úprav:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&4&3&6\\2&1&1&3\\1&3&2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&3\\0&2&4&4\\0&2&4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&3\\0&2&4&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Nyní vidíme, že $\operatorname{rank}(\mathbf{A})=2$, proto $\dim\operatorname{Im}\mathbf{A}=\dim\operatorname{Im}\mathbf{A}^T=\operatorname{rank}(\mathbf{A})=2$. Podle tvrzení z přednášky máme $\operatorname{Ker}\mathbf{A}=4-\operatorname{rank}(\mathbf{A})=4-2=2$ a podobně $\operatorname{Ker}\mathbf{A}^T=3-\operatorname{rank}(\mathbf{A}^T)=3-2=1$. Z nalezené matice snadno dopočítáme bázi řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A}$: $M=((4,5,1,0)^T,\ (3,5,0,1)^T$. Vidíme, že například vektory $(1,0,0,0)^T$, $(0,1,0,0)^T$ doplňují M na bázi $\mathbf{Z}_7^4$, neboť rank $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\4&5&1&0\\3&5&0&1\end{pmatrix}=4$. □

Úloha 8 (6.1.). (cvičení od 9:00): Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ uvažujme podprostory $U=\langle\begin{pmatrix}3\\4\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle$ a $V=\langle\begin{pmatrix}1\\3\\4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix}\rangle$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$. Spočítejte $\dim(U)$, $\dim(V)$, $\dim(U+V)$ a $\dim(U\cap V)$.

(cvičení od 10:40): Mějme množiny vektorů $X=\{\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\}$ a $Y=\{\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\}$ a nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ uvažujme podprostory $U=\langle X\rangle$ a $V=\langle Y\rangle$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^3$. Spočítejte $\dim(U)$, $\dim(V)$, $\dim(U+V)$ a $\dim(U\cap V)$.

Řešení.
(cvičení od 9:00):
Nejprve spočítáme pomocí Gaussovy eliminace dimenze i báze U a V:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&4&1&3\\1&2&1&2\\1&1&0&3\\2&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&1&1&4\\0&1&1&4\\0&4&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&1&1&4\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&3&4&2\\3&4&2&1\\1&1&0&2\\2&0&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&4&2\\0&0&0&0\\0&3&1&0\\0&4&3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&4&2\\0&3&1&0\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Protože $U = \mathrm{Im}\ \mathbf{A}$ a $V = \mathrm{Im}\ \mathbf{B}$, vidíme, že $\dim(U) = \dim(V) = 3$. Dále, protože $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix} \in U+V$ a $\mathrm{Im} A \subseteq U+V$, máme $\mathbb{Z}_5^4 = \mathrm{Im}\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&1&1&4\\0&0&2&4\\0&0&0&4\end{pmatrix} \subseteq U+V \subseteq \mathbb{Z}_5^4$. Tedy $U+V = \mathbb{Z}_5^4$, a proto $\dim(U+V) = 4$. Nyní podle Věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů je $\dim(U\cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) = 3+3-4 = 2$.

(cvičení od 10:40):

Obvyklým způsobem spočítáme pomocí Gaussovy eliminace dimenze (a vlastně i báze) U a V. Nejprve seřadíme do řádků matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ vektory z množin X a Y, aby $U = \mathrm{Im}\ \mathbf{A}$ a $V = \mathrm{Im}\ \mathbf{B}$ a spočítáme jejich hodnost:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0&4&1\\3&1&5\\2&3&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}3&1&5\\0&4&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix}1&3&6\\2&1&4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&6\\0&2&6\end{pmatrix}.$$

Vidíme, že proto $\dim(U) = \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = 2$ a $\dim(V) = \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = 2$. Dále

$$\dim(U+V) = \mathrm{rank}(\begin{pmatrix}3&1&5\\0&4&1\\1&3&6\\0&2&6\end{pmatrix}) = \mathrm{rank}(\begin{pmatrix}3&1&5\\0&4&1\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}) = 3$$

podle Věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů je $\dim(U\cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) = 2+2-3 = 1$. $\square$

Úloha 9 (13.1)**.** (cvičení od 9:00): Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ dané podmínkami

$$\varphi(\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix},\quad \varphi(\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\quad \varphi(\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}.$$

Najděte matici $[\varphi]_{K_2}^{K_3}$ lineárního zobrazení φ vzhledem ke kanonickým bázím, a spočítejte dimenze podprostorů $\mathrm{Ker}\varphi$ a $\mathrm{Im}\varphi$.

(cvičení od 10:40): Je-li $\psi : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^3$ lineární zobrazení nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ s maticí $[\psi]_C^B = \begin{pmatrix}4&3\\2&4\\3&1\end{pmatrix}$ vzhledem k bázím $B = (\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix})$ a $C = (\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix})$, spočítejte matici $[\psi]_{K_3}^{K_2}$ lineárního zobrazení ψ vzhledem ke kanonickým bázím, a dimenze podprostorů $\mathrm{Ker}\varphi$ a $\mathrm{Im}\varphi$.

Řešení.

(cvičení od 9:00):

Nejprve si všimněme, že posloupnost $M = (\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix})$ je báze prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ a že je ze zadání zjevná matice $[\varphi]_{K_2}^M = \begin{pmatrix}5&2&4\\4&3&6\end{pmatrix}$. Užijeme-li větu z přednášky, zjistíme, že

$$[\varphi]_{K_2}^{K_3} = [\varphi]_{K_2}^{M} \cdot [\mathrm{Id}]_{M}^{K_3} = [\varphi]_{K_2}^{M} \cdot ([\mathrm{Id}]_{K_3}^{M})^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Nyní spočítáme transponovaný součin $([\varphi]_{K_2}^{K_3})^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Zjistili jsme, že $[\varphi]_{K_2}^{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Odtud okamžitě vidíme, že $\mathrm{rank}[\varphi]_{K_2}^{K_3} = 1$, proto $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 3 - 1 = 2$ a $\dim \mathrm{Im}\varphi = 1$.

(cvičení od 10:40):

Požijeme-li větu z přednášky, zjistíme, že potřebujeme spočítat

$$[\psi]_{K_3}^{K_2} = [\mathrm{Id}]_{K_3}^{C} \cdot [\psi]_{C}^{B} \cdot [\mathrm{Id}]_{B}^{K_3} = [\mathrm{Id}]_{K_3}^{C} \cdot [\psi]_{C}^{B} \cdot ([\mathrm{Id}]_{K_3}^{B})^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

Nyní určíme transponovaný součin $([\psi]_{K_3}^{K_2})^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Zjistili jsme, že $[\psi]_{K_3}^{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Konečně vidíme, že $\mathrm{rank}[\psi]_{K_3}^{K_2} = 1$, proto $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 2 - 1 = 1$ a $\dim \mathrm{Im}\varphi = 1$. □