1. cvičení

Čtveřici $\mathbf{G} = (G, *, ', e)$ říkáme *grupa*, jestliže G je množina, $*$ binární a $'$ unární operace na G a $e \in G$, které pro každé $a, b, c \in G$ splňují podmínky:

$$a * (b * c) = (a * b) * c, \quad a * e = e * a = a \quad a * a' = a' * a = e$$

Grupu nazýváme *abelovskou*, pokud navíc $a * b = b * a$ pro všechna $a, b \in G$.

Je-li $\mathbf{G} = (G, *, ', e)$ grupa a $H \subseteq G$ splňuje pro všechna $a, b \in H$

$$e \in H, \quad a' \in H, \quad a * b \in H$$

pak se $\mathbf{H} = (H, *|_H, '|_H, e)$ nazývá *podgrupa* grupy $\mathbf{G}$ (značíme $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$).

1. Označme S_n množinu všech permutací (tj. bijekcí) na množině $\{1, \ldots, n\}$, $\circ$ jejich skládání a $^{-1}$ invertování. Nechť $A_n = \{\sigma \in S_n |\, \operatorname{sgn} \sigma = 1\}$, očíslujme postupně vrcholy čtverce $\{1, 2, 3, 4\}$ a označme D_8 množinu všech permutací vrcholů čtverce, které odpovídají geometrickým symetriím.

(a) Dokažte, že $\mathbf{S}_n = (S_n, \circ, ^{-1}, id)$ je grupa a A_n tvoří její podgrupu.

(b) Napište všechny prvky D_8. Jedná se o podgrupu $\mathbf{S}_4$?

2. Uvažujme čtvercové matice nad tělesem $\mathbf{T}$ stupně n a označme $GL_n(\mathbf{T})$ všechny takové regulární matice, $SL_n(\mathbf{T})$ všechny takové matice s determinantem 1 a $O_n(\mathbf{T})$ všechny takové matice A splňující podmínku $A \cdot A^T = I_n$.

(a) Dokažte, že $\mathbf{GL}_n(\mathbf{T}) = (GL_n(\mathbf{T}), \cdot, ^{-1}, I_n)$, $\mathbf{SL}_n(\mathbf{T}) = (SL_n(\mathbf{T}), \cdot, ^{-1}, I_n)$ a $\mathbf{O}_n(\mathbf{T}) = (O_n(\mathbf{T}), \cdot, ^{-1}, I_n)$ jsou grupy.

(b) Které z grup $\mathbf{GL}_n(\mathbf{T})$, $\mathbf{SL}_n(\mathbf{T})$, $\mathbf{O}_n(\mathbf{T})$ tvoří podgrupu jiné z těchto grup (v závislosti na tělese $\mathbf{T}$)?

3. Na množině $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ definujme operaci násobení vzorci

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j$$

a dále pravidly $(-1)x = x(-1) = -x$, $xy = -(yx)$, $(-x)y = x(-y) = -(yx)$ pro všechna $x, y \in \{\pm i, \pm j, \pm k\}$, kde $-$ mění znaménko. Dokažte, že lze na Q jednoznačně definovat invertování $^{-1}$, tak že $\mathbf{Q} = (Q, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa. Jak k tomu lze využít ztotožnění prvků s maticemi $1 \leftrightarrow I_2$, $i \leftrightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $j \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $k \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ v grupě $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$?

4. Nechť $(R, +, -, \cdot, 0, 1)$ je komutativní okruh s jednotkou a R^* je množina všech jeho invertibilních prvků. Dokažte, že $(R, +, -, 0)$ a $(R^*, \cdot, ^{-1}, 1)$ jsou abelovské grupy. Jak vypadají všechny podgrupy grupy $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$?

Řešení:

1. (a) Skládání i invertování (sudých) permutací je (sudá) permutace, identita je sudá permutace,

   (b) $D_8 = \{id, (1234), (13)(24), (1432), (14)(23), (12)(43), (13), (24)\}$ tvoří z geometrického náhledu podgrupu S_4.

2. (a) Plyne z poznatků z lineární algebry,

   (b) $\mathbf{G}L_n(\mathbf{T})$, $\mathbf{SL}_n(\mathbf{T}) \leq \mathbf{GL}_n(\mathbf{T})$, $\mathbf{O}_n(\mathbf{T}) \leq \mathbf{GL}_n(\mathbf{T})$ vždy, $\mathbf{O}_n(\mathbf{T}) \leq \mathbf{SL}_n(\mathbf{T})$ pokud je $\mathbf{T}$ charakteristiky 2.

3. Pro uvedené ztotožnění snadno ukážeme, že je $\mathbf{Q}$ podgrupa grupy $\mathbf{G}L_2(\mathbb{C})$

4. Plyne přímo z axiomů komutativního okruhu. Podgrupy grupy $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ jsou právě ideály oboru $(\mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1)$, tedy množiny $n\mathbb{Z}$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.