3. cvičení

1. Rozhodněte, zda jsou v grupě $\mathbf{A}_8$ konjugované permutace
(a) $(1\ 3)(2\ 8\ 6)(4\ 7)$ a $(1\ 2\ 8)(3\ 7)(5\ 4)$,
(b) $(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7\ 8)$ a $(1\ 3\ 2)(4\ 5\ 6\ 7\ 8)$.

2. Existují v grupách $\mathbf{S}_6$ a $\mathbf{S}_7$ prvky řádu 9, 10, 11, 12? Obsahuje $\mathbf{S}_5$ podgrupu řádu 12?

3. Dokažte:
(a) $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$,
(b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle (1,0), (0,1) \rangle$,
(c) $\mathbb{Q} = \langle \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \rangle$ a $\mathbb{Q}$ nelze nagenerovat konečně mnoha čísly,
(d) $\langle a, b \rangle_{\mathbb{Z}} = \{ka + lb : \ k, l \in \mathbb{Z}\} = \langle \mathrm{NSD}(a,b) \rangle_{\mathbb{Z}}$,
(e) $\mathbf{S}_n = \langle (1\ 2), (2\ 3), \ldots, (n-1\ n) \rangle = \langle (1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n) \rangle$.

Řešení:

1. (a) ano, například podle permutace (1 3 7 5 6),

   (b) ne, konjugující permutace jsou tvaru $(1\ 3\ 2)^i \circ (4\ 5\ 6\ 7\ 8)^j \circ (2\ 3)$ pro $i \in \mathbb{Z}_3$, $j \in \mathbb{Z}_5$, tedy jsou všechny liché.

2. Permutace řádu 9, resp. 11 by musela obsahovat cyklus déky 9, resp. 11, proto je $\mathbf{S}_6$ ani $\mathbf{S}_7$ neobsahuje.

   Permutace řádu 10 by musela obsahovat buď cyklus déky 2 a 5 nebo deseticyklus, tedy $\mathbf{S}_6$ takovou permutaci neobsahuje, zatímco například $(1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6\ 7) \in \mathbf{S}_7$ je prvek řádu 6.

   Podobně permutace řádu 12 musí obsahovat cykly délky 2 a 6 nebo délky 3 a 4 nebo cyklus délky 12, tedy takový prvek není v $\mathbf{S}_6$ a například $(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7) \in \mathbf{S}_7$ je prvek řádu 7.

   Protože $\mathbf{A}_4 \leq \mathbf{S}_4 \leq \mathbf{S}_5$, kde $\mathbf{A}_4$ je řádu 12.

3. (a) $\langle 1 \rangle = \{k \cdot 1 |\ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$,

   (b) $\langle (1,0),(0,1) \rangle = \{k(1,0) + l(0,1) |\ k,l \in \mathbb{Z}\} =$

   $= \{(k,0) + (0,l) |\ k,l \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

   (c) Jistě platí, že $\langle \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \rangle \subseteq \mathbb{Q}$.

   Pro libovolné $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ máme $\frac{a}{b} \in \langle \frac{1}{|b|} \rangle \subseteq \langle \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \rangle$, proto $\mathbb{Q} \subseteq \langle \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \rangle$.

   Pro každou konečnou množinu $F = \{\frac{a_i}{b_i} |\ i \leq n\}$ máme $\frac{1}{1+|\prod_i b_i|} \in \mathbb{Q} \setminus \langle F \rangle$.

   (d) Protože $\mathrm{NSD}(a,b)$ dělí a i b, vidíme, že

   $$\langle a,b \rangle_{\mathbb{Z}} = \{ka + lb :\ k,l \in \mathbb{Z}\} \subseteq \langle \mathrm{NSD}(a,b) \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

   Naopak z Bézoutovy rovnosti dostáváme celé koeficienty x, y pro něž $\mathrm{NSD}(a,b) = xa + yb \in \langle a,b \rangle$, a proto $\langle \mathrm{NSD}(a,b) \rangle \subseteq \langle a,b \rangle$.

   (e) Víme, že $\mathbf{S}_n = \langle \{(i\ j) |\ i < j \leq n\} \rangle$. Dále pro každé $i < j$ máme

   $$(i\ i{+}1\ \dots\ j-1\ j) = (i\ i{+}1) \circ (i{+}1\ i{+}2) \circ \dots (j-2\ j-1) \circ (j-1\ j),$$

   $$(i\ j) = (i+1\ i+2\ \dots\ j-1\ j)^{-1} \circ (i\ i+1) \circ (i+1\ i+2\ \dots\ j-1\ j),$$

   proto $(i\ j) \in \langle (1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n) \rangle$ pro každé $i < j$ a tedy

   $$\mathbf{S}_n = \langle (1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n) \rangle.$$

   Protože $(i\ i+1) = (1\ i+1) \circ (1\ i) \circ (1\ i+1)$, dostáváme také rovnost

   $$\mathbf{S}_n = \langle (1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n) \rangle.$$