5. cvičení

1. Rozhodněte, zda jsou izomorfní následující dvojice grup.
(a) $\mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, (b) $\mathbb{Z}^2$ a $\mathbb{Z}^3$, (c) $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}^2$, (d) $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$, (e) $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ a $\mathbf{S}_3$.

2. Rozhodněte, zda jsou následující grupy cyklické: $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbb{Z}_{12}^*$, $\mathbb{Z}_{14}^*$.

3. Napište všechny podgrupy grupy (a) $\mathbb{Z}_{18}$, (b) $\mathbb{Z}_{23}^*$. Jak jsou podgrupy uspořádány inkluzí?

4. Spočítejte, kolik podgrup mají grupy (a) $\mathbb{Z}_{350}$, (b) $\mathbb{Z}_{67}^*$.

Řešení:

1. (a) Ano, protože obě grupy $\mathbb{Z}_6 = \langle 1 \rangle$ a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \langle (1,1) \rangle$ jsou cyklické řádu 6.

   (b) Ne, $\mathbb{Z}^2 = \langle (1,0),(0,1) \rangle$ je generována dvěma prvky, zatímco $\mathbb{Z}^3$ je generován aspoň tříprvkou množinou, protože $\mathbb{Z}^3 \leq \mathbb{Q}^3 = LO(\mathbb{Z}^3)$ a tudíž množina generátorů $\mathbb{Z}^3$ tvoří množinu generátorů racionálního vektorového prostoru $\mathbb{Q}^3$ (izomorfní obraz množiny generátorů grupy je opět množina generátorů, tedy uvedená vlastnost je invariant).

   (c) Ne, protože grupa $\mathbb{Q}^2$ obsahuje podgrupu izomorfní grupě $\mathbb{Z}^2$ a grupa $\mathbb{Q}$ takovou podgrupu neobsahuje, taková vlastnost je opět invariantem.

   (d) Ano, protože $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ lze chápat jako racionální vektorové prostory se stejně mohutnou nespočetnou bází (její existence ovšem závisí na axiomu výběru), jsou proto izomorfní jako vektorové prostory, a tudíž i jako grupy.

   (e) Ano, všechny permutace tříprvkové množiny nenulových vektorů $\mathbb{Z}_2^2$ jsou lineární zobrazení a zobrazení, které permutaci přiřadí matice vyhledem k pevné bázi reprezentující tato lineární zobrazení $\mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$ dává grupový izomorfismus.

2. $\mathbf{A}_3 = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ a $\mathbb{Z}_{14}^* = \langle 3 \rangle$ jsou cyklické, zatímco $\mathbb{Z}_{12}^* \cong \mathbb{Z}_2^2$ ani (nekomutativní) $\mathbf{S}_3$ cyklické nejsou.

3. (a) $\{0\}$ leží ve všech podgrupách a všechny podgrupy obsahuje celé $\mathbb{Z}_{18}$, dále $\langle 9 \rangle \subset \langle 3 \rangle$, $\langle 6 \rangle \subset \langle 3 \rangle, \langle 2 \rangle$.

   (b) Protože
   $$2^{11} \equiv 1,\ (-1)^2 \equiv 1 \pmod{23},$$
   $$(-2)^{11} \not\equiv 1,\ 2^2 \not\equiv 1,\ (-2)^2 \not\equiv 1 \pmod{23}$$
   dostáváme, že $\langle 1 \rangle \subset \langle 2 \rangle, \langle 22 \rangle \subset \langle 21 \rangle = \mathbb{Z}_{23}^*$

4. Obě grupy jsou cyklické, proto mají tolik podgrup, kolik má řád grupy dělitelů, tj. (a) 12, (b) 8.