

## 6. cvičení

1. Rozložte grupy  $\mathbb{Z}_{15}^*$ ,  $\mathbb{Z}_{16}^*$ ,  $\mathbb{Z}_{30}^*$  na direktní součin cyklických grup (tj. napište nějaký direktní součin, jemuž jsou tyto grupy izomorfní).
2. Určete kolik mají prvků a zda jsou cyklické grupy automorfizmů (a)  $\mathbf{Aut}(\mathbb{Z}_{10})$ , (b)  $\mathbf{Aut}(\mathbb{Z}_{10}^*)$ , (c)  $\mathbf{Aut}(\mathbb{Z}_{100})$ , (d)  $\mathbf{Aut}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ , (e)  $\mathbf{Aut}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ .
3. Existuje  $n$  takové, že  $\mathbb{Z}_n^*$  je izomorfní (a)  $\mathbb{Z}_7$ , (b)  $\mathbb{Z}_8$ , (c)  $\mathbb{Z}_9$ ?

**Řešení:**

1.  $\mathbb{Z}_{15}^* \cong \mathbb{Z}_{16}^* \cong \mathbb{Z}_{30}^* \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
2. (a) 4, ano, (b) 2, ano, (c) 40, ne, (d) 48, ne, (e) 8, ne.
3. (a), (b), (c) ne, protože  $\mathbb{Z}_{\prod_i p_i^{r_i}}^* \cong \prod_i \mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}^*$  pro  $n = \prod_i p_i^{r_i}$  prvočíselný rozklad.