3. cvičení

1. Vydělte se zbytkem polynomy

(a) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x + 3 \ : \ x^2 + 2$ v okruhu $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{Z}_5[x]$,

(b) $x^4 + x^2 + x \ : \ x^2 + x + 1$ v okruhu $\mathbb{Q}[x]$ a okruhu $\mathbb{Z}_2[x]$,

(c) $x^{10} + x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x \ : \ x + 1$ v okruhu $\mathbb{Z}_2[x]$,

(d) $x^n - 1 \ : \ x^k - 1$ v okruhu polynomů nad libovolným oborem.

2. Určete násobnost kořenu 2 polynomu

(a) $x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8$ v okruhu $\mathbb{R}[x]$

(b) $x^5 + x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$ v okruhu $\mathbb{Z}_7[x]$,

(c) $x^5 + 2x^3 + x^2 + 2$ v okruhu $\mathbb{Z}_3[x]$.

3. Dokažte, že pro každé dva polynomy f, g nad libovolným oborem platí Leibnitzovo pravidlo $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

4. Uvažujme zobrazení $D : R[x] \to R[x]$, kde R je obor, splňující pro každé $c \in R$ a $f, g \in R[x]$ podmínky $D(c) = 0$, $D(x) = 1$, $D(f + g) = D(f) + D(g)$, $D(f + g) = D(f) + D(g)$ a $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$. Dokažte postupně pro každé $c \in R$ $n \in \mathbb{N}$, že

(a) $D(c \cdot f) = c \cdot D(f)$,

(b) $D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$,

(c) D je nutně právě derivace.

5. Dokažte, že jsou-li polynomy f, f' nesoudělné, pak f nemá vícenásobný kořen.

Řešení:

1. (a) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x + 3 = (x^2 + 2)(x^2 + 3x + 2) + (-5x - 1)$ v $\mathbb{R}[x]$ a

   $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x + 3 = (x^2 + 2)(x^2 + 3x + 2) + 4$ $\mathbb{Z}_5[x]$

   (b) $x^4 + x^2 + x = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + (x - 1)$ v $\mathbb{Q}[x]$ a $x^4 + x^2 + x = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) + (x + 1)$ v $\mathbb{Z}_2[x]$

   (c) $x^{10} + x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x = (x + 1)(x^9 + x^6 + x^5 + x^2 + 1) + 1$,

   (d) Vydělíme-li se zbytkem $n = qk + r$, kde $0 \leq r < k$, pak

   $x^n - 1 = \sum_{i=0}^{q-1} x^{ik+r} \cdot (x^k - 1) + (x^r - 1)$

2. (a) 3, (b) 3, (c) 4.

3. Stačí si všimnout, že

$$(x^i)' \cdot x^j + x^i \cdot (x^j)' = nx^{i+j-1} + mx^{i+j-1} = (i + j)x^{i+j-1} = (x^{i+j})' = (x^i \cdot x^j)',$$

$$(f \cdot g)' = (\sum_i f_i x^i \sum_j g_j x^j)' = \sum_{i,j} f_i g_j ((x^i)' x^j + x^i (x^j)') =$$

$$= (\sum_i f_i x^i)' \cdot \sum_j g_j x^j + \sum_i f_i x^i \cdot (\sum_j g_j x^j)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

4. (a) $D(c \cdot f) = D(c) \cdot f + c \cdot D(f) = 0 \cdot f + c \cdot D(f) = c \cdot D(f)$,

   (b) indukcí: $D(x) = 1 = 1x^0$ a pokud $D(x^{n-1}) = (n - 1)x^{n-2}$, pak $D(x^n) = D(x \cdot x^{n-1}) = D(x) \cdot x^{n-1} + x \cdot D(x^{n-1}) = x^{n-1} + (n - 1)x \cdot x^{n-2} = n \cdot x^{n-1}$,

   (c) $D(\sum_i f_i x^i) = \sum_i f_i D(x^i) = \sum_i f_i i x^{i-1}) = (\sum_i f_i x^i)'$.

5. Má-li f vícenásobný kořen α, pak existuje g, pro kter $f = (x - \alpha)^2 g$, a protože $f' = ((x - \alpha)^2 g)' = 2(x - \alpha)g + (x - \alpha)^2 g'$ je $(x - \alpha)$ společný dělitel f, tudíž f, f' jsou soudělné.