# 5. cvičení

**1.** Spočtěte (a) $3^{3^{3^{3^{3^{3}}}}}$ modulo 28 a (b) $100^{99^{98}}$ modulo 39 a modulo 40.

**2.** Najděte všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ splňující $x^6 + x + xy \equiv 1 \pmod 7$.

**3.** Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$, pro která platí
(a) $x \equiv 5 \pmod 7$, $x \equiv 4 \pmod 8$, $x \equiv 2 \pmod 9$,
(b) $10x \equiv 6 \pmod{32}$ a $3x \equiv 1 \pmod 5$.

**4.** Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující
(a) $x^2 \equiv 36 \pmod{45}$ (b) $x^2 \equiv -1 \pmod{65}$ .

**5.** Dokažte vzoreček $\varphi(\prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^{k} \varphi(p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)p_i^{r_i - 1}$ pro Eulerovu funkci, kde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ jsou prvočísla.

**Řešení:**

1. (a) $3^{3^{3^{3^{3^{3}}}}} \equiv 27 \pmod{28}$,

   (b) $100^{99^{98}} \equiv 1 \pmod{39}$, $100^{99^{98}} \equiv 0 \pmod{40}$

2. $x \not\equiv 0 \pmod{7}, y \equiv -1 \pmod{7}$.

3. (a) $x \equiv 236 \pmod{504}$, (b) $x \equiv 7 \pmod{80}$.

4. (a) $x \equiv \pm 6 \pmod{15}$, tj. $x \in \{\pm 6 + 15k \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

   (b) $x \equiv \pm 8 \pmod{65}$ nebo $x \equiv \pm 18 \pmod{65}$.