11. cvičení

Ve škole:

1. Spočítejte ireducibilní rozklady:
(a) 17, $11 + 2i$ v $\mathbb{Z}[i]$,
(b) $x^4 - 4$ v $\mathbb{Z}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$,
(c) $3 - i\sqrt{2}, 1 - 2i\sqrt{2}, 2$ v $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$

2. Spočítejte v $\mathbb{Z}[i]$ (pomocí Eukleidova algoritmu nebo normy)
(a) $\mathrm{NSD}(5 + 7i, 3 - i)$, (b) $\mathrm{NSD}(5, 3 + 4i)$, (c) $\mathrm{NSD}(8 + 5i, 4 + i)$.

3. Najděte v $\mathbb{Z}[i]$ $\mathrm{NSD}(6 - 7i, 7 + i)$ a příslušné Bezoutovy koeficienty.

4. V oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ dokažte, že neexistuje žádný prvek s normou 2 ani 3, a určete nějaký ireducibilní rozklad prvku 6. Jedná se o rozklad na prvočinitele?

Úlohy pro samostatné počítání:

5. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $35x + 8y = 7$.

Řešení:

1. (a) $17 = 1 + 4^2 = (1+4i)(1-4i)$, $11 + 2i = -(1+2i)^3$,

   (b) $x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$ v $\mathbb{Z}[x]$,

   $x^4 - 4 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x^2 + 2)$ v $\mathbb{R}[x]$,

   $x^4 - 4 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})$ v $\mathbb{C}[x]$

   (c) $3 - i\sqrt{2}$ je ireducibilní, $1 - 2i\sqrt{2} = -(1 + i\sqrt{2})^2$, $2 = -(i\sqrt{2})^2$.

2. (a) $1 + i$, (b) $2 + i$, (c) 1.

3. $\mathrm{NSD}(6 - 7i, 7 + i) = -2 - i = (6 - 7i) + (-1 + i)(7 + i)$.

4. Kdyby $\nu(a + bi\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2 = 2, 3$, pak by $b = 0$ a tedy 2 či 3 by byla druhá mocnina, což neplatí.

   Například $6 = 2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$ jsou ireducibilní rozklady, kde žádný z členů rozkladu není prvočinitel.

5. $(x, y) \in \{(21 - 8k, -91 + 35k) \mid k \in Z\} = \{(-3 - 8k, 14 + 35k) \mid k \in Z\}$.